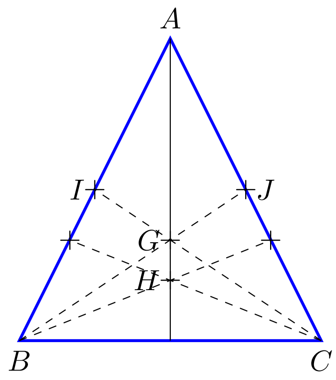
Transformations du plan

Exercice 1

Enoncé

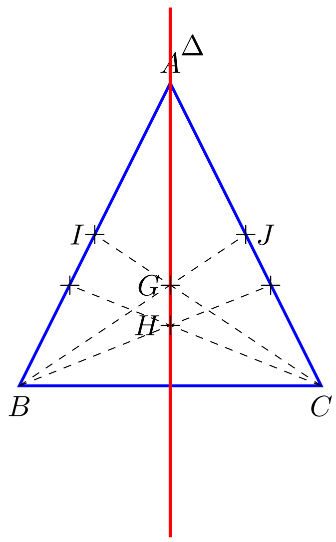


ABC est un triangle isocèle de sommet A. On note H son orthocentre , G son centre de gravité et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Démontrer que :

1. $CI = BJ$
2. $HC = HC$
3. Le triangle HIJ est un triangle isocèle .

Correction

Notons : Δ la droite (AH)
Et S la symétrie par rapport à Δ



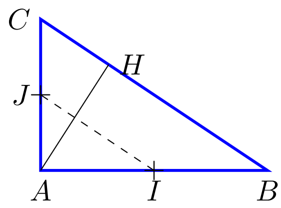
1. - $\Delta = (AH)$ est la hauteur issue de A du triangle ABC
     Or le triangle ABC est isocèle de sommet A
     Donc Δ est la médiatrice de $[BC]$
     donc $\boxed{S(B) = C}$
   - A appartient à δ donc $\boxed{S(A) = A}$
   - Les isométries conservent le milieu
     De plus $S(B) = C$ et $S(A) = A$
     Donc : $\boxed{S(I) = J}$
   - Les isométries conservent la distance
     De plus $S(B) = C$ et $S(I) = J$
     Donc : $\boxed{BI = CJ}$
2. - Les isométries conservent la distance
     De plus $S(B) = C$ et $S(H) = H$
     Donc : $\boxed{HB = HC}$
3. - Les isométries conservent la distance
     De plus $S(I) = J$ et $S(H) = H$
     Donc : $\boxed{IH = JH}$
     donc : Le triangle HIJ est isocéle de sommet H

Exercice 2

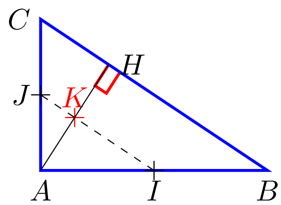
Enoncé

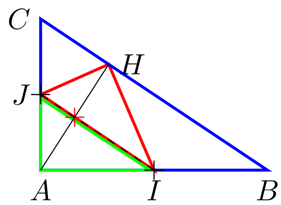
ABC est un triangle non isocèle et rectangle en A
On note H le pied de la hauteur issue de A et I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$

1. Démontrer que H est le symétrique de A par rapport à (IJ) .
2. Quelle est la nature du triangle HIJ ?



Correction





- I est le milieu de $[AB]$
  J est le milieu de $[AC]$
  Donc (IJ) est parallèle à (AC)
  (D'après le théorème des milieux)
- Notons K le point d'intersection des droites (IJ) et (AH)
  On a (IK) parallèle à (BH)
  Donc K est le milieu de $[AH]$
  (D'après le théorème des milieux)
- (AH) est perpendiculaire à (BC)
  (BC) est parallèle à (IJ)
  Donc : (AH) est perpendiculaire à (IJ)
- Donc (IJ) est perpendiculaire à $[AH]$ et passe par le milieu de $[AH]$
  Donc : (IJ) est la médiatrice de $[AH]$
  Donc : H est le symétrique de A par rapport à (IJ)
- HIJ est un triangle rectangle
  Car les symétries conservent les angles