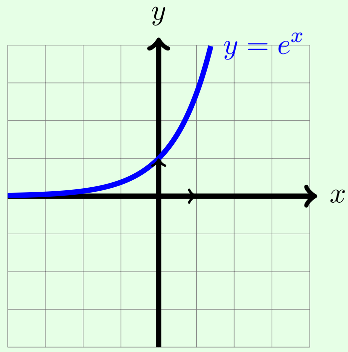
Limites liées aux fonctions exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

Conjectures

L'observation du tableau de valeurs ci-dessous et de la courbe de la fonction exponentielle permet d'observer la croissance très rapide de la fonction vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ainsi que la convergence très rapide vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$



x	-100	-50	-10	-5	-1	5	10	50	100	1000
e^x	3×10^{-44}	2×10^{-22}	34.5×10^{-5}	$0,007$	$0,37$	148	22026	5×10^{21}	2.6×10^{43}	2×10^{434}

Propriété 1

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = \cdots\cdots$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = \cdots\cdots$

Démonstration

Propriété 2 : Croissance comparée de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \cdots\cdots}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \cdots\cdots}$

Démonstration

Exemples

Déterminer les limites suivantes :

- ✘ $\lim\limits_{x \to +\infty} (5e^x + 100x)$
- ✘ $\lim\limits_{x \to -\infty} (5e^x + 100x)$
- ✘ $\lim\limits_{x \to +\infty} (5e^x - 100x)$
- ✘ $\lim\limits_{x \to -\infty} (5e^x - 100x)$
- ✘ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2e^x - 10}{e^x + 5}\right)$
- ✘ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2e^x - 10}{e^x + 5}\right)$

Complément

En fait la très forte croissance de la fonction exponentielle vers $+\infty$ implique que la fonction exponentielle <u>domine</u> tous les polynômes quels que soient leurs degrés
Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle montrent que la convergence vers 0 au voisinage de $-\infty$ est aussi dominante
Ainsi on a pour tout n de $\mathbb{N}$ non nul

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \cdots\cdots}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \cdots\cdots}$$

Exemples

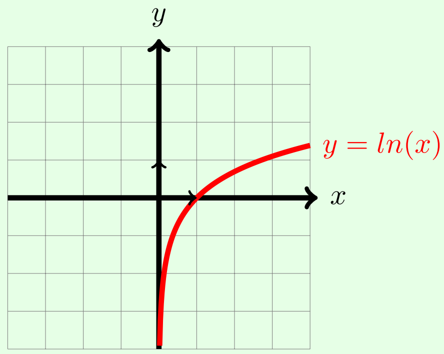
Déterminer les limites suivantes :

- ✘ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5e^x + 100x^2\right)$
- ✘ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5e^x + 100x^2\right)$
- ✘ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5e^x - 100x^3\right)$
- ✘ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5e^x - 100x^3\right)$

Fonction logarithme népérien

Conjectures

Observons le comportement de la fonction ln dans le tableau de valeurs et la représentation graphique ci-dessous :
La fonction est certes croissante mais très faiblement
On peut ainsi douter du comportement de la fonction ln au voisinage de $+\infty$
Le calcul de $ln\left(10^{50}\right)$, par exemple, ne fait que confirmer cet état de fait :
$ln\left(10^{50}\right) \approx 115$
Cependant l'égalité : $ln\left(e^{x}\right) = x$ prouve que la fonction ln peut atteindre toute valeur aussi grande soit elle
De même l'égalité $ln\left(e^{-x}\right) = -x$ prouve que la fonction ln peut atteindre toute valeur aussi petite soit elle



x	10	50	100	500	1000	5000	10000
$ln(x) \approx$	2,3	3,91	4,60	6,21	6,90	8,51	9,21

Propriété 3

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = \cdots\cdots$

$\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = \cdots\cdots$

Démonstration

Propriété 4 : Croissance comparée de $x \mapsto ln(x)$ et $x \mapsto x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x} = \cdots\cdots$

$\lim\limits_{x \to 0} xln(x) = \cdots\cdots$

Démonstration

Exemples

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (ln(x) + 2x)$
- $\lim\limits_{x \to 0} (ln(x) + 2x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (ln(x) - 2x)$
- $\lim\limits_{x \to 0} (x(ln(x) - 2))$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{ln(x)}{x+5}\right)$
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ln(x)}{x+5}\right)$

Complément

En fait la très faible croissance de la fonction logarithme vers $+\infty$ implique que la fonction logarithme est dominée tous les polynômes quels que soient leurs degrés
Les propriétés algébriques de la fonction logarithme montrent que la divergence vers $-\infty$ au voisinage de 0 est aussi *dominée*
Pour tout n de N non nul

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x^n} = \cdots\cdots$

$\lim\limits_{x \to 0} x^n ln(x) = \cdots\cdots$

Démonstration des limites admises

Croissance comparée de $ln(x)$ avec x^n au voisinage de $+\infty$

Démontrons que : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0}$ pour n dans $\mathbb{N}$ $n \leq 1$

Le cas $n = 1$ a été démontré plus haut en comparant $ln(x)$ à la fonction $\sqrt{x}$

Soit $n \geq 2$

On a : pour tout $x > 1$ $x^n > x$

Donc : $0 < \frac{1}{x^n} < \frac{1}{x}$

Donc : $0 < \frac{ln(x)}{x^n} < \frac{ln(x)}{x}$

Or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0}$

Croissance comparée de e^x avec x^n au voisinage de $+\infty$

Démontrons que : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$ pour n dans $\mathbb{N}$ $n \leq 1$

Le cas $n = 1$ a été démontré plus haut en comparant e^x à la fonction x^2

Soit $n \geq 2$ et $x > 1$

On a : $\frac{e^x}{x^n} = e^{ln\left(\frac{e^x}{x^n}\right)}$

Donc : $\frac{e^x}{x^n} = e^{ln(e^x) - ln(x^n)}$

Donc : $\frac{e^x}{x^n} = e^{x - nln(x)}$

Or puisque x domine $ln(x)$ $\lim_{x \to +\infty} x - nln(x) = +\infty$

donc : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$