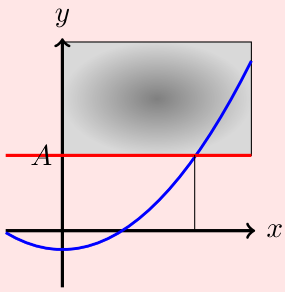
Limites de fonctions : aspect théorique

Limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

1 La fonction f tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$
si et seulement si :
tout intervalle $]A;+\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x dépasse une certaine valeur (dépendant bien sur de A)
On note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2 La fonction f tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$
si et seulement si
tout intervalle $]-\infty;B[$ $(B \in \mathbb{R})$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x dépasse une certaine valeur (dépendant bien sur de B)
On note $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$



Remarque

1 On définit de même la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$

2 f tend vers $-\infty$ si et seulement si la fonction $-f$ tend vers $+\infty$

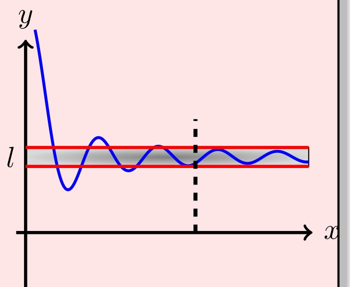
Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ pour tous entiers n pairs et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ pour tous entiers n impairs

Limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

Soit l un réel, une fonction f tend vers l quand x tend vers $+\infty$
si et seulement si
tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x dépasse une certaine valeur
On note alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l}$ (resp. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l}$)



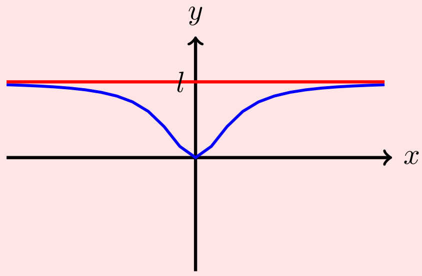
Remarque

- Les intervalles ouverts contenant l seront souvent appelés <u>tuyaux</u>
- On définit de même la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$

  On nota alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l}$

Définition

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$)
<u>alors</u>
On dit que la droite d'équation $y = l$ est une :
$\boxed{\text{asymptote horizontale}}$ à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).



LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN a ($a \in \mathbb{R}$)

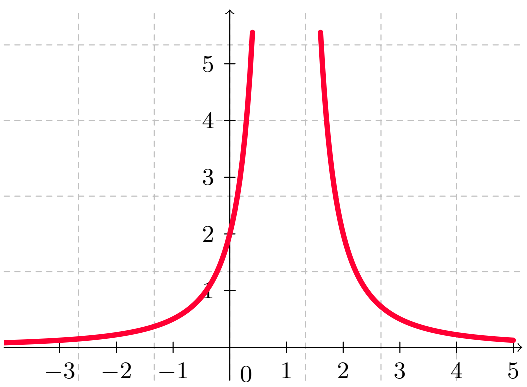
<u>Exemple d'introduction</u>

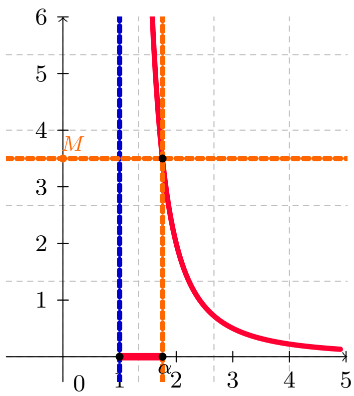
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$

- Ensemble de définition :

- Étude des variations :

- Observation de la courbe :





Dans ce qui suit on considère un réel a et un intervalle <u>ouvert</u> I dont a est un borne,et f une fonction définie dans I

Définition

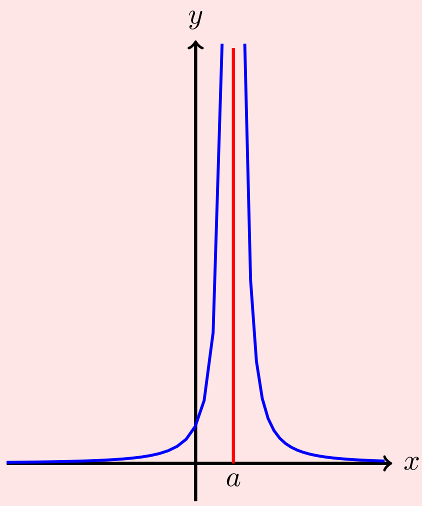
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a
si et seulement si
tout intervalle $]A; +\infty[$ ($A \in \mathbb{R}$), contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans un intervalle ouvert I contenant a ou dont a est un borne.

Définition

On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a
si et seulement si
tout intervalle $]-\infty; A[$ ($A \in \mathbb{R}$), contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans un intervalle ouvert I contenant a ou dont a est un borne.

Définition

Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.



Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

— On note $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ la limite quand x tend vers a de la restriction de la fonction f à l' intervalle $I \cap [a; +\infty[$

— On note $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ la limite quand x tend vers a de la restriction de la fonction f à l' intervalle $I \cap]-\infty; a]$

Exemples

On considère la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{-x+2}$

Établir le tableau de variation complet de f