# Devoir surveillé

## Exercice 1 (/6pts)

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.*
Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

   **a.** $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   **a.** $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

   **a.** $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   **a.** $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   **a.** $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   **a.** $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

## Exercice 2 : (/7pts)

*Les parties A , B et C sont indépendantes*

### Partie A

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Montrer les propriétés suivantes de j :

1. $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\mathrm{j}^3=1$.
3. $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.
4. $\mathrm{j}=-\mathrm{j}^2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.

### Partie B

On considère le nombre complexe : $z=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

1. Déterminer la forme algébrique de $z^2$
   puis une forme exponentielle de $z^2$
2. En déduire une forme exponentielle de $z$
3. Déterminer une forme exponentielle puis algébrique de $z^6$ , $z^9$ et $z^{12}$

**Partie C : Roc**

1. Démontrer que pour tout réel $\theta$ $\quad cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\quad$ et $\quad sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
2. En déduire que : $\quad 1 + e^{i\theta} = 2cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ $\quad$ et $\quad 1 - e^{i\theta} = -2isin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
3. Jo la science affirme que pour tout $\theta$ un argument de $1 + e^{i\theta}$ est $\dfrac{\theta}{2}$ . Qu'en pensez vous ?

# Exercice 3 (/7 pts)

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère l'événement :

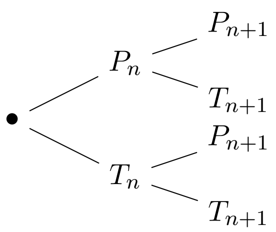
– $T_n$ : « le manchot utilise le toboggan lors de son $n$-ième passage. »
– $P_n$ : « le manchot utilise le plongeoir lors de son $n$-ième passage. »

On considère alors la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement $T_n$.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$ , $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$ , $p_{P_1}(T_2)$.
   (b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :




   (d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.
   (e) A l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite $(u_n)$.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   (c) Calculer la limite de la suite $(u_n)$. Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

## Exercice 2 : correction

### Partie A

1. $e^{\frac{2i\pi}{3}} = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

   Or $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

   Et $sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   donc : $\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$

2. $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{3\times\frac{2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = \boxed{1}$

3. $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{1-1}{1-j} = \boxed{0}$

4. $-j^2 e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{i\pi} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} \times e^{\frac{i\pi}{3}}$

   Donc : $-j^2 e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\pi + \frac{4i\pi}{3} + \frac{i\pi}{3}}$

   Donc : $-j^2 e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{2\pi + \frac{i\pi}{3}}$

   Donc : $\boxed{-j^2 e^{\frac{i\pi}{3}} = j}$

### Partie B

1. $z^2 = \left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)^2$

   Donc : $z^2 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 + 2i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + i^2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

   Or $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 2\sqrt{12}$

   Et $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 2\sqrt{12}$

   Et $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) = 6 - 2 = 4$

   On a donc : $z^2 = \left(8 + 2\sqrt{12}\right) + 8i - \left(8 - 2\sqrt{12}\right)$

   D'où : $\boxed{z^2 = 4\sqrt{12} + 8i}$ Recherche de la forme exponentielle :

   - Calcul du module : $|z^2| = \sqrt{16 \times 12 + 64} = 16$
   - Ecriture trigonométrique :

     $4\sqrt{12} + 8i = 16 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

     donc : $4\sqrt{12} + 8i = 16 \times \left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

     Ecriture exponentielle : $\boxed{4\sqrt{12} + 8i = 16e^{\frac{i\pi}{6}}}$

2. Posons $z = Re^{i\theta}$

   On a alors $z^2 = R^2 e^{2i\theta}$

   On a donc : $R^2 e^{2i\theta} = 16e^{\frac{i\pi}{6}}$

   On a donc : $R^2 = 16$ et $2\theta = \frac{\pi}{6}$ modulo $(2\pi)$

   D'où : $R = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{12}$ modulo $\boxed{\pi}$

   Donc : $z = 4e^{\frac{i\pi}{12}}$ où $z = 4e^{\frac{13i\pi}{12}}$

   Or : $Im(z) > 0$ donc : $\boxed{z = 4e^{\frac{i\pi}{12}}}$

3. - $z^6 = (z^2)^3 = \left(16e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^3 = 16^3 e^{\frac{i\pi}{2}} = -4096i$
   - $z^9 = \left(4e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^9 = 4^9 e^{\frac{3i\pi}{4}}$

     Donc : $z^9 == 262144e^{\frac{3i\pi}{4}}$
   - $z^{12} = (z^2)^6 = \left(16e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^{12} = 16^{12} e^{2i\pi} = 16^{12}$

4. on a : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (cos(\theta) + isin(\theta) + (cos(-\theta) + isin(-\theta))$

   Donc : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta) + cos(\theta) - isin(\theta) = 2cos(\theta)$

Donc : $\boxed{cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$

de même :

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (cos(\theta) + isin(\theta) - (cos(-\theta) + isin(-\theta))$

Donc : $\quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta) - cos(\theta) + isin(\theta) = 2isin(\theta)$

Donc : $\boxed{sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

5. $2cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = \left(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

   Qui est égal à : $\quad e^{\frac{i\theta}{2}} \times e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}} \times e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i\theta} + 1$

   De même :

   $-2isin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = \left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

   Qui est égal à : $\quad -e^{\frac{i\theta}{2}} \times e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}} \times e^{\frac{i\theta}{2}} = -e^{i\theta} + 1$

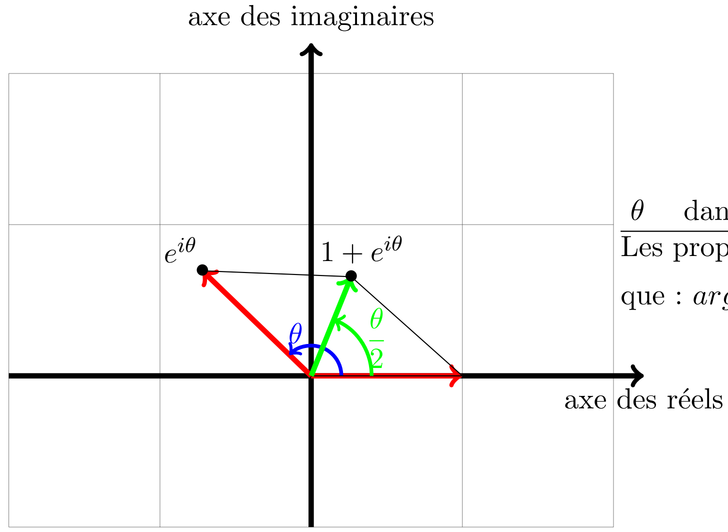
6. Lorsque $cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) < 0$

   $2cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ n'est pas une écriture exponentielle

   par exemple : $1 + e^{2i\pi} = 1 + 1 = 2$

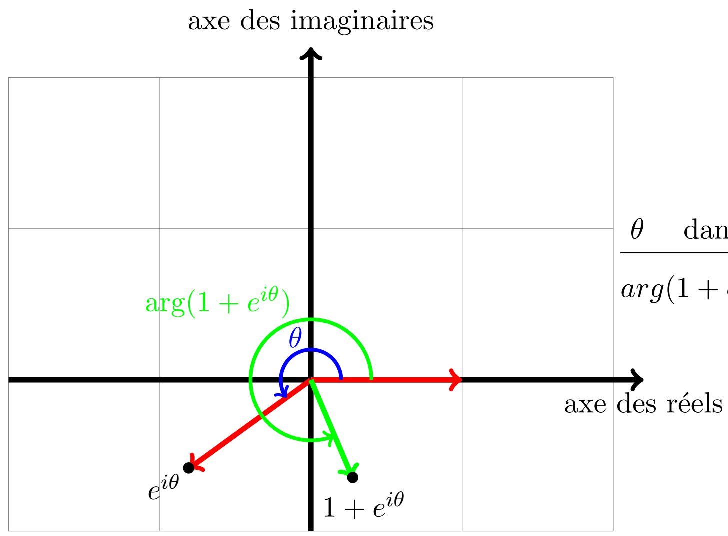
   Un argument de 2 est 0 qui n'est pas $\dfrac{\pi}{2}$

   Illustration graphique :




$\theta$ dans $[0; \pi[$

Les propriétés du losange permettent d'affirmer que : $arg(1 + e^{i\theta}) = \dfrac{\theta}{2}$



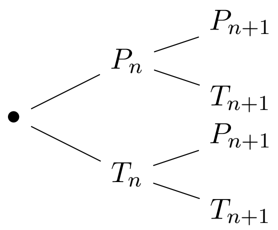

$\theta$ dans $[\pi; \frac{3\pi}{2}[$

$arg(1 + e^{i\theta})$ n'est pas égal à $\dfrac{\theta}{2}$

# Exercice 3 :correction

1. (a) $T_1$ et $P_1$ étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.
   D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
   Toujours d'après lénoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

   (b) D'après le principe des probabilités totales :
   $p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \dfrac{1}{4}$.

   (c)

   (d) Toujours d'après le principe des probabilités totales :
   $u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$ ; $u_2 = 0,25$ ; $u_3 = 0,225$ ; $u_4 = 0,225$ ; $u_5 = 0,2225$.
   Il semble que $u_n$ ait pour limite $0,222\ldots$.

2. (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{10}u_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{10}u_n - \dfrac{1}{45} = \dfrac{1}{10}\left(u_n - \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{1}{10}v_n$.
   La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ ; son premier terme est $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

   (b) On sait que $v_n = v_1 \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.
   Comme $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, on a $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

   (c) Comme $0 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.
   Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.