

Devoir en temps libre

On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10t^2}{1+t^2} dt$ en utilisant deux méthodes distinctes.

Les parties A et B sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A

Utilisation d'une intégration par parties

1. En remarquant que $\frac{10t^2}{1+t^2} = 5t \times \frac{2t}{1+t^2}$, établir l'égalité

$$I = \frac{5}{2} \times \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt.$$

2. On pose, pour x positif ou nul, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.
- (a) En utilisant les variations de f , démontrer que $f(x) \geq 0$. En procédant de la même façon, on pourrait établir que $g(x) \leq 0$, inégalité que l'on admettra ici.
- (b) à l'aide de ce qui précède, montrer que l'encadrement :

$$t^2 - \frac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2.$$

est vrai pour tout réel t .

- (c) Déduire de la question précédente que

$$-\frac{5}{24} \leq -5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt \leq -\frac{37}{192}.$$

3. En utilisant les questions précédentes, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 0,02 de I par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

PARTIE B

Utilisation de la méthode d'Euler

1. On pose $\varphi(x) = \int_0^x \frac{10t^2}{1+t^2} dt$ pour $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
Préciser $\varphi(0)$ ainsi que la fonction dérivée de φ .
2. On rappelle que la méthode d'Euler permet de construire une suite de points $M_n(x_n; y_n)$ proches de la courbe représentative de φ . En choisissant comme pas $h = 0,1$, on obtient la suite de points M_n définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,1 \\ y_{n+1} = y_n + \varphi'(x_n) \times 0,1 \end{cases}$$

En utilisant, sans la justifier, l'égalité $x_n = \frac{n}{10}$ vérifier que $y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{100 + n^2}$.

3. Calculer y_1 , et y_2 , puis exprimer y_3, y_4 et y_5 sous la forme d'une somme de fractions que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Donner maintenant une valeur approchée à 0,001 près de y_5 .

Le réel x_5 étant égal à $\frac{1}{2}$, y_5 est donc une valeur approchée de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire de I .

4. Avec la méthode d'Euler au pas $h = 0,01$, on obtient, pour I , la valeur approchée 0,354.

Les valeurs de I obtenues avec la méthode d'Euler sont-elles compatibles avec l'encadrement de la question 3. de la partie A ?

Correction

Partie A

1. En posant $u(t) = 5t$ et $v'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, on a :
- $u'(t) = 5$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$, car quel que soit t réel, $1+t^2 \geq 1 > 0$. On obtient donc en intégrant par parties (toutes les fonctions étant continues) : $I = [5t \times \ln(1+t^2)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 5 \ln(1+t^2) dt = \frac{5}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt$.

2. Soient $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.

(a) f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0, \text{ car } 1+x \geq 1 > 0 \text{ et } x^2 \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante à partir de $\ln(1) - 0 + 0 = 0$: elle est donc positive.

Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

On admet de même que pour $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$.

(b) On déduit de la question précédente que :

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \iff x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \text{ et que}$$

$$\ln(1+x) - x \leq 0 \iff \ln(1+x) \leq x \text{ soit}$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

En écrivant cet encadrement avec $x = t^2$ (puisque $x \geq 0$), on obtient l'encadrement :

$$t^2 - \frac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2.$$

(c) En intégrant les trois fonctions précédentes sur $[0 ; \frac{1}{2}]$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 5 \left(t^2 - \frac{t^4}{2} \right) dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 5 \ln(1+t^2) dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 5t^2 dt \iff \left[\frac{5t^3}{3} - \frac{t^5}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 5 \ln(1+t^2) dt \leq \left[\frac{5t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} \iff \frac{5}{24} - \frac{1}{64} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 5 \ln(1+t^2) dt \leq \frac{5}{24} \text{ et finalement en prenant les opposés :}$$

$$-\frac{5}{24} \leq -5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt \leq -\frac{37}{192}$$

3. On déduit de la question 1. et de la question 2. c. que

$$\frac{5}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{5}{24} \leq I \leq \frac{5}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{37}{192} \text{ soit}$$

$$0,349 \leq I \leq 0,366$$

Partie B

1. $\varphi(0)$ est l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle d'amplitude nulle : donc $\varphi(0) = 0$.

Par définition de l'intégrale $\varphi(t) = \frac{10t^2}{1+t^2}$.

2. Avec $y_{n+1} = y_n + \varphi'(x_n) \times 0,1$ et $x_n = \frac{n}{10}$, on obtient $y_{n+1} = y_n + \frac{10 \times \frac{n^2}{100}}{1 + \frac{n^2}{100}} \times 0,1$, soit $y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{100 + n^2}$.

3. à partir de $y_0 = 0$ et grâce à la formule de récurrence obtenue ci-dessus, on peut calculer $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{101}$. Puis $y_3 = \frac{1}{101} + \frac{4}{104}$, $y_4 = \frac{1}{101} + \frac{4}{104} + \frac{9}{109}$ et $y_5 = \frac{1}{101} + \frac{4}{104} + \frac{9}{1096} + \frac{16}{116}$.
 $y_5 \approx 0,269$ à $0,001$ près.

4. La valeur trouvée pour I par la méthode d'Euler avec un pas de 0,1 est incompatible avec l'encadrement trouvé à la question A. 3.

La valeur 0,354 trouvée par la méthode d'Euler et un pas de 0,01 est compatible avec l'encadrement précité. (En fait $I \approx 0,364$)