Devoir en temps libre

Exercice 1 :Contrôles à la chaîne

Un fabricant d'écrans teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif, il expédie l'écran chez le client.
Sinon l'écran retourne à l'usine où il est réparé puis testé une seconde fois.
Si le second test est positif,il est expédié chez le client,sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70% des écrans neufs sortis directement de la chaîne mais que parmi les écrans réparés,seulement 65% d'entre eux passent le second test avec succès.
Dans le cas contraire l'écran est détruit
On note T_1 l'événement : "Le premier test est positif"
et C ' événement "L'écran est acheminé chez le client"

1. On choisit un écran au hasard à la sortie des chaînes de fabrication.
   Définir par une phrase l'événement $C \cap \overline{T_1}$
   Démontrer que la valeur de $P\left(C \cap \overline{T_1}\right) = 0.195$
   On utilisera la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
2. Démontrer que $P(C) = 0.895$
3. La fabrication d'un écran revient à 1000 euros si l'écran n'est testé qu'une seule fois. Cela coûte 50 euros de plus si l'écran doit subir un second test.
   Un écran est facturé a euros ($a > 0$) au client.
   On note G la variable aléatoire qui à chaque écran fabriqué associe le gain algébrique du fabricant.
   (a) Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de G :

k	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050
$p(G = k)$			

   (b) Calculer en fonction de a l'espérance de la variable aléatoire de G
   Déterminer la valeur de a pour que l'entreprise réalise en moyenne 50 euros de bénéfice par écran vendu

Exercice 2

Un boulanger fabrique des pains de campagne qui doivent peser, en théorie, 600 grammes.
On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur les poids possibles des pains de campagne, exprimés en grammes et arrondis à 10 grammes près.
Le tableau suivant indique la probabilité p_i de l'événement $X = x_i$.

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

Exemple de lecture la probabilité qu'un pain choisi au hasard pèse 590 grammes est 0,25

1. Calculez l'espérance de X et l'écart-type de X.
   On donnera les résultats obtenus à la calculatrice
2. Un client achète un pain de campagne. Quelle est la probabilité que son pain pèse au moins 600 grammes ?
3. Un contrôleur du service de la Répression des fraudes entre dans la boulangerie et prélève, au hasard, dix pains de campagne. On fait l'hypothèse que le nombre de pains fabriqués est très grand et que le fait de prélever dix pains parmi eux ne change pas les probabilités.
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement un pain de 580 grammes ?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir au plus un pain de plus de 580 grammes ?
   (c) Le contrôleur prélève n pains. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au plus un pain de 580 grammes soit supérieure ou égale à 0,9999 ?

Exercice 3

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne en contenant six rouges numérotées de 1 à 6 et quatre blanches numérotées de 7 à 10.

1. Quel est parmi les calculs suivants celui qui donne le nombre de cas possibles ? :
   A_{10}^3 $\qquad$ C_{10}^3 $\qquad$ 10^3 ?
   Donner alors le nombre de cas possibles
2. Donner à l'aide de la calculatrice les valeurs de :
   $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}$ $\qquad$ $\dfrac{C_6^2 \times C_1^4}{C_{10}^3}$ $\qquad$ $\dfrac{C_6^1 \times C_2^4}{C_{10}^3}$
3. On suppose que :
   - Si le joueur obtient trois boules rouges, il gagne 100 euros
   - Si le joueur obtient exactement deux boules rouges, il gagne 15 euros
   - Si le joueur obtient une seule boule rouge, il gagne 4 euros
   - Si le joueur n'obtient pas de boules rouges, il ne gagne rien

   (a) Donner dans un tableau la loi de probabilité de X
   On pourra utiliser les résultats obtenus à la question 2

   (b) Calculer l'espérance de X

   (c) Pour un jeu,la mise est de 10 euros . Le jeu est-il favorable au joueur ?

   (d) Le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable,l'organisateur envisage deux solutions :
   – Soit augmenter la mise de 1 euros
   – Soit diminuer chaque gain d'un euro (y compris 0)
   Quel est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

Correction exercice 1

1. $C \cap \overline{T_1}$ est l'événement : l'écran est envoyé chez le client et a subi une réparation
   $P\left(C \cap \overline{T_1}\right) = P_{\overline{T_1}}(C) \times P\left(\overline{T_1}\right) = 0,65 \times 0,3 = 0,195$
2. $P(C) = P\left(C \cap T_1\right) + P\left(C \cap \overline{T_1}\right)$
   Or $C \cap T_1 = T_1$
   En effet si le téléviseur a passé avec succès le premier test il est envoyé chez les clients
   Donc : $P(C) = P\left(T_1\right) + P\left(C \cap \overline{T_1}\right)$
   Donc $P(C) = 0,7 + 0,195 = 0,895$
3. (a)

k	$a-1000$	$a-1050$	-1050
$p(G=k)$	0,7	0,195	0,105

   (b) Donc $E(G) = 0,7 \times (a-1000) + 0,195 \times (a-10850) + 0,105 \times 1050$
   Donc $E(G) = 0,895a - 1015$
   Pour que l'entreprise réalise en moyenne 50 euros de bénéfice par écran vendu il suffit que l'espérance soit égal à 50 euros
   On résout donc : $E(G) = 50$
   $E(G) = 50 \quad \Longleftrightarrow 0,895a = 1065 \quad \Longleftrightarrow a \approx 1190$
   Il suffit donc de fixer le prix de vente à 1190 euros .

Exercice 2

1. **Espérance de X** :
$E(X) = 580 \times 0,12 + 590 \times 0,25 + 600 \times 0,32 + 610 \times 0,27 + 620 \times 0,04 = 598,6$
Variance de X
$V(X) = (580 - 598,6)^2 \times 0,12 + (590 - 598,6)^2 \times 0,25 + (600 - 598,6)^2 \times 0,32 + (610 - 598,6)^2 \times 0,27 + (620 - 598,6)^2 \times 0,04 = 114,04$
Ecart-type de X
$\sigma_x = \sqrt{114,04} \approx 10,68$
2. Un client achète un pain de campagne.
La probabilité que son pain pèse au moins 600 grammes vaut :
$P(X \geq 600) = P(X = 600) + P(X = 610) + P(X = 620) = 0,32 + 0,27 + 0,04 = 0,63$
3. Un contrôleur du service de la Répression des fraudes entre dans la boulangerie et prélève, au hasard, dix pains de campagne. On fait l'hypothèse que le nombre de pains fabriqués est très grand et que le fait de prélever dix pains parmi eux ne change pas les probabilités.
On répète 10 fois , **de manière indépendante** une expérience aléatoire à deux isssues :
• *Obtenir un pain de 580 grammes* noté : *succès* de probabilité $0,12$
• *Ne pas obtenir un pain de 580 grammes* noté : *échec* de probabilité $0,88$
Notons Y la variable aléatoire qui donne **le nombre de pains de 580 grammes** obtenu .
Y est une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,12$
$\boxed{Y = B(10; 0,12)}$
   (a) la probabilité d'avoir exactement un pain de 580 grammes vaut : $P(Y = 1) = C_{10}^1 \times 0,12^1 \times 0,88^9 \approx 0,38$
   (b) la probabilité d'avoir au plus un pain de 580 grammes vaut :
   $P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = C_{10}^0 \times 0,12^0 \times 0,88^10 + 0,38 \approx 0,28 = 0,66$
   (c) Le contrôleur prélève n pains
   Le nombre Z de pains de 580 grammes obtenus suit une loi binomiale de paramètre n et $0,12$
   $Z = B(n; 0,12)$
   Pour obtenir la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au plus un pain de 580 grammes soit supérieure ou égale à 0,9999 il suffit de résoudre :
   $P(Z \leq 1) \geq 0,9999$
   C'est à dire : $C_n^1 \times 0,12^1 \times 0,88^{n-1} + C_n^0 \times 0,12^0 \times 0,88^n \geq 0,9999$
   C'est à dire : $n \times 0,12 \times 0,88^{n-1} + 0,88^n \geq 0,9999$
   On utilise la calculatrice pour obtenir un tableau de valeurs :

1	2	3	4	5
1	0,9856	0,9603	0,9268	0,8876

   La valeur minimale de n est donc 1

Exercice 3

Exercice 3

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne en contenant six rouges numérotées de 1 à 6 et quatre blanches numérotées de 7 à 10.

1. Le nombre de cas possibles est :
   $C_{10}^3 = 120$

2. La calculatrice donne :
   $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$ $\dfrac{C_6^2 \times C_1^4}{C_{10}^3} \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{C_6^1 \times C_2^4}{C_{10}^3} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

3. On suppose que :
   - Si le joueur obtient trois boules rouges, il gagne 100 euros
   - Si le joueur obtient exactement deux boules rouges, il gagne 15 euros
   - Si le joueur obtient une seule boule rouge, il gagne 4 euros
   - Si le joueur n'obtient pas de boules rouges, il ne gagne rien

   (a) Tableau la loi de probabilité de X

100	15	4	0
$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

   (b) l'espérance de X donnée par la calculatrice vaut : $X \approx 25,37$

   (c) Pour un jeu,la mise est de 10 euros . Le jeu est favorable au joueur puisque l'espérance de gain dépasse la mise pour jouer ?

   (d) Le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable,l'organisateur envisage deux solutions :
   – Soit augmenter la mise de 1 euros
     L'écart entre la mise et l'espérance de gain vaut : $25,37 - 11 = 23,37$
   – Soit diminuer chaque gain d'un euro (y compris 0) La nouvelle espérance est : $24,37$
     L'écart entre la mise et l'espérance de gain vaut : $24,37 - 10 = 23,37$
   Les deux solutions sont équivalentes pour l'organisateur