Généralisation de la notion de puissance

LA NOTATION a^b , $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Puissances entières

Si a est un nombre réel et n un nombre $\boxed{\text{entier relatif}}$ a^n est défini de manière algébrique.
Par exemple :

- $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

On peut, par exemple, calculer :

- $5^4 = \cdots\cdots\cdots$
- $18^0 = \cdots$
- $2^{-3} = \cdots\cdots\cdots$

Propriétés

Les propriétés de la multiplication conduisent aisément à :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Puissances rationnelles

Si a est un nombre réel positif nous savons aussi calculer :

- $a^{\frac{1}{2}} =$
- $a^{\frac{1}{3}} =$
- $a^{\frac{1}{4}} =$

On peut, par exemple, calculer :

- $16^{\frac{1}{2}} = \cdots\cdots\cdots$
- $127^{\frac{2}{3}} = \cdots\cdots\cdots\cdots$
- $65^{\frac{5}{4}} = \cdots\cdots\cdots$

Remarque

On rappelle que les nombres rationnels sont les nombres qui s"écrivent sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs : $\dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.
En conséquence le développement décimal de tels nombres présente obligatoirement une périodicité .
Par exemple : $\dfrac{17}{11} = 1,54545454...$
ou : $\dfrac{163}{999} = 0,163163163163.....$
Ou encore : $\dfrac{17}{125} = 1,73600000....$
D'après l'information précédente on sait calculer la puissance rationnelle d'un nombre.
Mais il existe d 'autres nombres : **les nombres irrationnels**. Le développement décimal de tels nombres en présente pas de périodicité.
Par exemple $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ sont de tels nombres.
On a alors un problème pour définir (et calculer) par exemple 2^{π}

La solution : utiliser exp et ln

On remarque que : $a^n = e^{ln(a^n)} = e^{\cdots\cdots}$
Ceci va permettre de prolonger cette notion de puissance aux puissances ni entières ni rationnelles de nombres positifs
En ce qui concerne les puissances de nombres négatifs , nous devrons nous contenter des puissances entières :
Par exemple : $(-5)^3 = \cdots\cdots$ est bien défini

Définition

Si a est un $\boxed{\text{réel strictement positif}}$ et b un réel quelconque, on appelle a « puissance » b et on note a^b le réel $\boxed{\cdots\cdots\cdots}$.

Exemple

$11^{\sqrt{3}} = \ldots\ldots.$

Propriété

Soient a et a' deux $\boxed{\text{réels}}$ strictement positifs, et b et b' deux $\boxed{\text{réels}}$ quelconques.
On a :

- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$
- $1^b = 1$
- $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$
- $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$
- $(aa')^b = a^b a'^b$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

Démonstration

Il suffit pour démontrer ces propriétés de revenir à l'écriture exponentielle
Par exemple :
$a^{b+b'} = \ldots\ldots\ldots\ldots..$

Exercice

Résoudre l'inéquation : (E) : $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$.

FONCTION $f_a : x \mapsto a^x$, $a > 0$

Rappel

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ $\quad f_a(x) = a^x = e^{xln(a)}$

Propriété

a est un réel strictement positif.

1 La fonction f_a est définie, dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$.

2 Pour tout réel x, $f'_a(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots..$

Variations

Pour tout réel x, $a^x > 0$, donc $\exp'_a(x)$ est du signe de $\ln a$.
On a donc :

- lorsque $a > 1$, $\quad x \mapsto a^x$ est .... sur $\mathbb{R}$;
- lorsque $0 < a < 1$, $\quad x \mapsto a^x$ est .... sur $\mathbb{R}$.

Résumé

$\boxed{a > 1}$

- $x \mapsto a^x$ est .... sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = \ldots\ldots$
- L'axe des abscisses est asymptote en ....

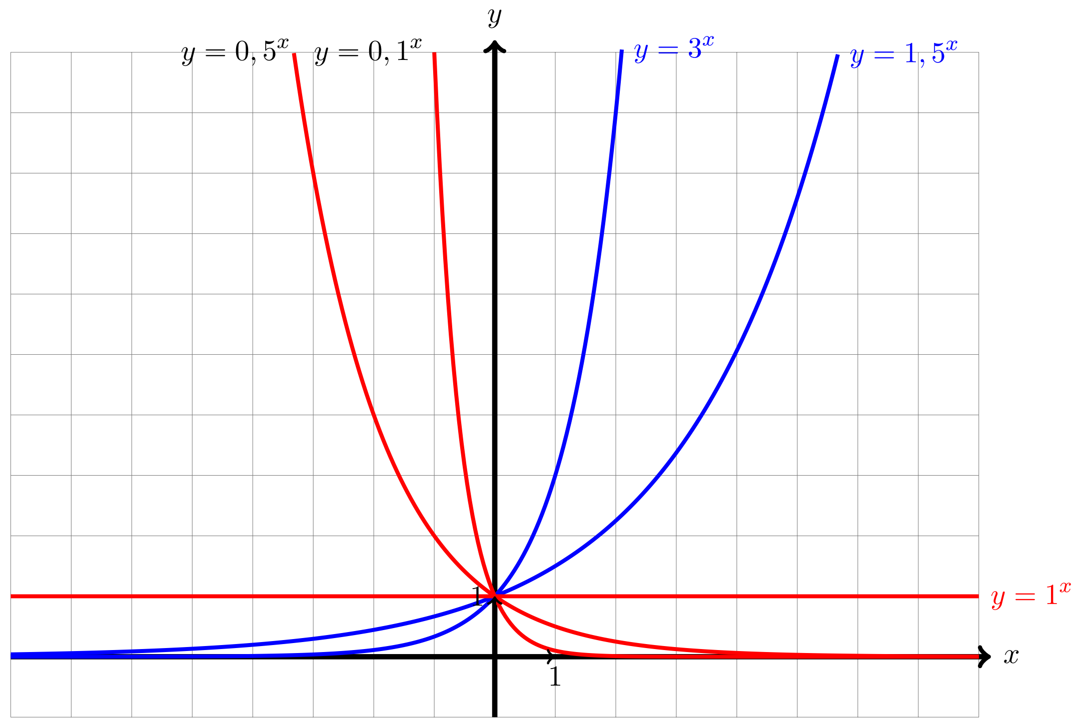
x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variation de f	0 ↗	$+\infty$

$\boxed{0 < a < 1}$

- $x \mapsto a^x$ est .... sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = \ldots\ldots$
- L'axe des abscisses est asymptote en ......

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	
Variation de f	$+\infty$ ↘	0

Courbes représentatives



Remarque

1 Toutes les courbes passent par le point de coordonnées (0 ;1).

2 Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est la fonction réciproque de la fonction logarithme $\log_a$, c'est à dire que :

pour tout réel x strictement positif, $\exp_a(\log_a(x)) = x$

pour tout réel x, $\log_a(\exp_a(x)) = x$.

Les courbes représentatives, dans un repère orthonormé, des fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On rappelle que : $log_a(x) = \dfrac{ln(x)}{ln(a)}$

Exercice

Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \times 2^x$.

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	0	$\searrow$	$\cdots$	$\nearrow$	$+\infty$

Précisions sur la fonction racine n-ième

Définition

On considère un entier naturel non nul n et un nombre réel a positif ou nul
L'équation : $x^n = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$
Cette solution est notée : ....

Justification

La fonction $x \longmapsto x^n$ est ....sur $[0; +\infty[$;
de plus $0^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, donc d'après ...., pour tout a de $[0; +\infty[$:
il existe un unique réel x_0 de l'intervalle $[0; +\infty[$ tel que $x_0^n = a$.

Exercice

$\sqrt[4]{16} = \ldots$ car $\ldots$; $\sqrt[3]{125} = \ldots$ car $5^3 = \ldots$.

Remarque

- La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est appelée fonction racine n-ième.
- Pour tout réel $x > 0$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$

Propriété

Pour tout réel x strictement positif, et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\cdots\cdots}.$$

En effet

Pour tout réel $x > 0$, on a $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, d'où $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \ln x$,
or pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = n \ln\left(\sqrt[n]{x}\right)$,

On obtient ainsi : $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \dfrac{1}{n} \ln x$

Donc $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Finalement : pour tout réel $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Généralisation aux exposants rationnels

Soient x un réel strictement positif, p un entier relatif et q un entier naturel non nul, on pose :

$$x^{-\frac{1}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{q}}} \qquad \text{et} \qquad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p.$$

Exercice

Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation : $5x(x^2 + \sqrt{x}) = 3(1 + x^3)$.

Croissances comparées des fonctions : $x \mapsto e^x$, $x \mapsto ln(x)$, $x \mapsto x^\alpha$

Comparaison avec les fonctions puissances entières

Rappels (au voisinage de $+\infty$

Au voisinage de $+\infty$ la fonction exponentielle *l'emporte* sur les fonctions puissances entières qui *l'emportent* sur la fonction logarithme Népérien.
Ainsi les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ deviennent :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{ln(x)} = +\infty}$

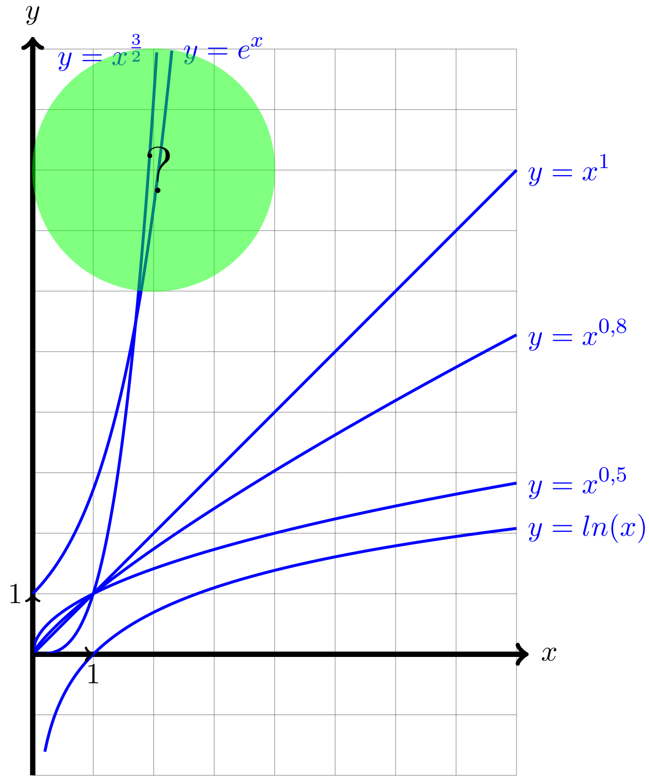
Rappels (au voisinage de $-\infty$ ou 0

On a de même les formes indéterminées $0 \times \infty$ levées par :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^n \times e^x = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^n \times ln(x) = 0}$

Généralisation

On peut de même comparer les fonctions exponentielles et logarithme népérien avec les fonctions puissances non entières.
Le graphique ci-contre peut laisser un doute sur les fonctions $x \mapsto x^{3/2}$ et $x \mapsto e^x$
.
Cependant $x^{\frac{3}{2}} \leq x^2$ pour $x \geq 1$ et e^x l'emporte sur x^2 donc a fortiori sur $x^{\frac{3}{2}}$



Propriété

1 Soit α un réel, alors : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

2 Soit α un réel strictement positif. Alors : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.