Barycentre

Rappels sur le barycentre

Définition

On considère n points A_i et n nombres réels a_i

Supposons $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0}$

Il existe alors un unique point G tel que : $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iG} = \vec{0}$

(C'est à dire : $\overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{A_2G} + \cdots + \overrightarrow{A_nG} = \vec{0}$)

On dit que G est le barycentre du système de n points pondérés $\{(A_i; a_i)\}$.

Remarque

Dans le cas où $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, la fonction qui à un point M associe le vecteur $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iM}$ est une fonction constante.

Donc : il existe un vecteur $\vec{U}$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{U}$ pour tout point M.

deux cas de figure se présentent alors :

- Ou bien $\vec{U} \neq \vec{0}$

  Dans ce cas il n'existe aucun point vérifiant $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$
- Ou bien $\vec{U} = \vec{0}$

  Dans ce cas $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$ pour tout point M

Dans les deux cas la notion de barycentre ne peut être défini.

Exemples

1)

Soient A et B deux points distincts .

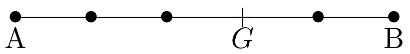
On note G le barycentre du système de points pondérés : $\{(A; 2); (B; 3)\}$

On a donc : $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{AG} + 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) = \vec{0}$

D'où : $5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$



2)

Soient A , B et C deux points distincts .

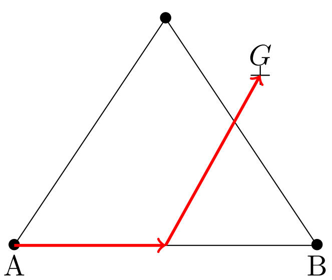
On note G le barycentre du système de points pondérés : $\{(A; -1); (B; 2); (C, ; 3)\}$

On a donc : $-\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

Donc : $-\overrightarrow{AG} + 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) + 3\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}\right) = \vec{0}$

D'où : $4\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



Homogénéité-isobarycentre

Propriété d'homogénéité

Soit k un nombre non nul .
le barycentre du systéme de points pondérés $\{(A_i; a_i)\}$ est aussi le barycentre du système de points pondérés $\{(A_i; k \times a_i)\}$
Le barycentre ne change pas si on multiplie ou divise tous les coefficients par un même réel non nul.

Définition : Isobarycentre

Soit t un nombre réel non nul
Le barycentre du systéme de points pondéré $\{(A_i; t)\}$ est aussi le barycentre du système $\{(A_i; 1)\}$ Dans ce cas le barycentre est appelé **isobarycentre**

Remarque

- L'isobarycentre de deux point A et B est le milieu du segment $[AB]$
- L'isobarycentre de trois point A , B , C est le point d'intersection des médianes (C'est à dire le centre de gravité) du triangle ABC

Simplification d'écritures vectorielles

Exemple d'introduction

Soient A , B , C , D et M quatre points du plan
Considérons l'expression vectorielle $\vec{V} = 5\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}$.
Nous allons utiliser le barycentre G du système $\{(A; 5); (B; 2); (C; -4); (D; 1)\}$ de façon à simplifier l'écriture de $\vec{V}$
$\vec{V} = 5\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}$
Donc : $\vec{V} = 5\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) + 2\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right) - 4\left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM}\right) + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}\right)$
Donc : $\vec{V} = (5 + 2 - 4 + 1)\overrightarrow{GM} + 5\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - 4\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG}$
Or : $5\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - 4\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{O}$
D'où : $\boxed{\vec{V} = 4\overrightarrow{GM}}$

Propriété

On considère n points A_i et n nombres réels a_i tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$
Notons G le barycentre de du système de n points pondérés $\{(A_i; a_i)\}$
Considérons alors un point M .
Alors $\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{A_iM} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{GM}$

Remarque

En appliquant la propriété précédente avec pour point M un des points A_i on obtient une égalié vectorielle permettant de construire le barycentre .
par exemple :
Notons G le barycentre de $\{(A; a); (B; b); (C, c)\}$ ($a + b + c \neq 0$)
on a alors : $a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA} = (a + b + c)\overrightarrow{AG}$
D'où : $(a + b + c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$
D'où : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{a + b + c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 1

On considère un tétraèdre $ABCD$

Déterminer l'ensemble des points de l'espace tels que : $||\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{DM}||=5$

Exercice 2

On considère dans le plan un triangle isocèle ABC de sommet principal A. On note A' le milieu de $[BC]$.

1. Soit H le barycentre de $(A;2)(B;1)(C;1)$. Placer H sur un dessin.
2. On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
   $||2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}||=2||\overrightarrow{AA'}||$
   (a) Montrer que A et A' sont des éléments de (E).
   (b) Déterminer l'ensemble (E) et le représenter sur le dessin.

Associativité du barycentre

Exemple d'introduction

On considère un tétraèdre $ABCD$

Soit G le barycentre de $\{(A;1);(B;1);(C;1);(D;2)\}$

On a donc : $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+2\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

Notons H le barycentre (*partiel*) de : $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

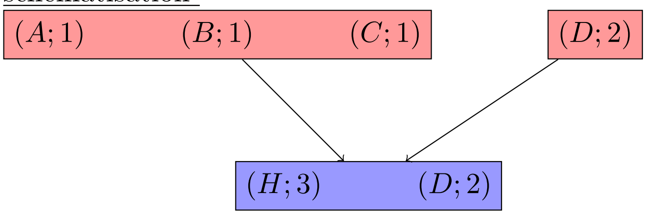
On a donc d'après la propriété de simplification d'écriture :

$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=3\overrightarrow{HG}$

On obtient donc : $3\overrightarrow{HG}+2\overrightarrow{DG}=\vec{0}$

donc $\boxed{G \text{ est le barycentre de } \{(H;3);(D;1)\}}$

schématisation



Propriété : Méthode du barycentre partiel

On considère n points A_i et n nombres réels a_i tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

Notons G le barycentre de $\{(A_i;a_i)\}$ pour i de 1 à n

Soit p un nombre entier strictement plus petit que n et supérieur ou ègal à 1.

Supposons que : $\sum_{i=1}^{p} a_i \neq 0$.

Notons H le barycentre de $\{(A_i;a_i)\}$ pour i de 1 à p

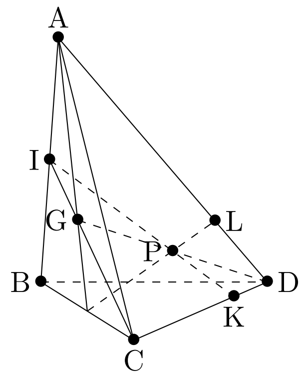
Alors :

G est le barycentre de $\boxed{\left\{\left(H;\sum_{i=1}^{p} a_i\right);(A_{p+1};a_{p+1});\cdots;(A_n;a_n)\right\}}$

En fait, dans la définition du barycentre, on peut remplacer une série de points par le barycentre partiel pondéré par la somme des poids des points remplacés.

Exemple

On considère un tétraèdre $ABCD$,notons G le centre de gravité du triangle ABC, et P le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,3)$.
Alors P est le barycentre de $(G,3)$ et $(D,3)$.
P est aussi le barycentre de $(I,2)$ et $(K,4)$ où I est le milieu de $[AB]$ et K le barycentre de $(C,1)$ et $(D,3)$.
P est aussi le barycentre de $(J,2)$ et de $(L,4)$ où J est le milieu de $[BC]$ et L le barycentre de $(A,1)$ et $(D,3)$.
Il en résulte que les droites (DG), (IK) et (JL) sont concourantes en P



Barycentre et coordonnées

Propriété

On considère un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

On considère n points A_i de coordonnées $(x_i;y_i;z_i)$ et n nombres réels a_i tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

Notons G le barycentre de $\{(A_i;a_i)\}$. Notons $(x_G;y_G;z_G)$ les coordonnées de G
On a alors :

$$x_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \times x_i\right) \qquad y_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \times y_i\right) \qquad z_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \times z_i\right)$$

Caractérisations barycentriques

Droite (AB) et segment $[AB]$

Théorème

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
- M appartient à la droite (AB) si, et seulement si, il existe deux réels a et b de somme non nulle tels que M soit le barycentre du système de points pondérés $\{(A, a); (B, b)\}$.
- M appartient au segment $[AB]$ si, et seulement si, il existe deux réels **positifs ou nuls** a et b de somme non nulle tels que M soit le barycentre du système de points pondérés $\{(A, a); (B, b)\}$.

Démonstration

1. Si M est un point de (AB), alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
   De $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, on déduit : $\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$, d'où $(1-k)\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.
   Or $(1-k) + k \neq 0$, donc M est le barycentre de $A(1-k)$ et (B, k).
   Réciproquement, si M est le barycentre de (A, a) et (B, b), alors :
   $(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
   Donc M appartient à la droite (AB).
2. Si M est un point du segment $[AB]$, alors il existe $k \in [0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
   On en déduit alors $(1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ et comme $k \in [0; 1]$, $1-k$ et k sont positifs.
   Ainsi, M est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1-k); (B, k)\}$ avec $1-k$ et k positifs.
   Réciproquement, si M est le barycentre du système de points pondérés$\{(A, a); (B, b)\}$ avec a et b positifs,
   alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
   Or $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $0 \leq b \leq a+b$ avec $a+b \neq 0$, ce qui donne $0 \leq \dfrac{b}{a+b} \leq 1$, et ainsi M appartient au segment $[AB]$.

Plan (ABC)

Théorème

Soient A, B, et C trois points non alignés de l'espace. L'ensemble des barycentres des points pondérés $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$, avec a, b et c réels tels que $a+b+c \neq 0$ est le plan (ABC).

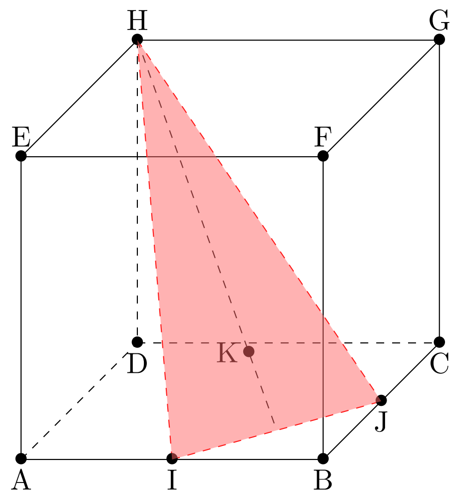
Démonstration

- Soient trois réels a, b et c tels que $a+b+c \neq 0$ et M le barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.
  - Si $b+c \neq 0$
    soit N le barycentre de $\{(B, b); (C, c)\}$, N est alors un point de la droite (BC), donc (AN) est une droite du plan (ABC).
    En utilisant l'associativité du barycentre, M est alors le barycentre de $\{(A, a); (N, b+c)\}$. M est alors un point de la droite (AN) et donc du plan (ABC).
  - Si $b+c = 0$
    alors $b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (b+c)\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{BC} = c\overrightarrow{BC}$ et on obtient alors $a\overrightarrow{AM} + c\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$.
    M est alors sur la droite passant par A et parallèle à (BC), donc M est dans le plan (ABC).
- *Réciproquement*, soit M un point du plan (ABC)
  - Si $M = A$, alors M est le barycentre du système $\{(A, 1); (B, 0); (C, 0)\}$.
  - Si $M \neq A$, alors
    si les droites (AM) et (BC) sont sécantes en un point N, alors il existe des réels a et λ ($\lambda \neq 0$, $a+\lambda \neq 0$) et des réels b et c avec $b+c = \lambda$ tels que M soit barycentre de $\{(A, a); (N, \lambda)\}$ et N de $\{(B, b); (C, c)\}$. Donc d'après l'associativité du barycentre, M est barycentre de $\{A, a); (B, b); (C, c)\}$.
    si les droites (AM) et (BC) sont parallèles, alors $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BC}$ donc M est barycentre de $\{(A, 1); (B, -k); (C, k)\}$.

Corollaire :

> M est un point du plan (ABC) si, et seulement si, il existe deux réels t et k tels que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

$ABCDEFGH$ est un cube ; I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$.
K est le barycentre de $\{(A,1);(B,2);(C,1);(H,1)\}$.
Démontrons que les points K, I, J et H sont coplanaires.
I est le barycentre de $\{(A,1);(B,1)\}$ et J celui de $\{(B,1);(C,1)\}$.
Puisque K est barycentre de $\{(A,1);(B,2);(C,1);(H,1)\}$, il est aussi barycentre de $\{(A,1);(B,1);(B,1)(C,1);(H,1)\}$par
Donc K est aussi barycentre de $\{(I,2);(J,2);(H,1)\}$. Ainsi K est dans le plan (IJH) et les points K, I, J, et H sont coplanaires.



Triangle ABC

Théorème

> Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
> Un point M appartient au triangle ABC si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c **positifs ou nuls** de somme non nul tels que M soit le barycentre du système de points pondérés $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

Démonstration

- Si M est un point du triangle ABC,
  - Si M est un point d'un des côtés du triangle (par exemple $[AB]$), on a vu qu'il existe deux réels a et b positifs ou nuls tels que M est barycentre de $\{(A,a);(B,b)\}$.
    M est alors barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,0)\}$.
    De même pour les côtés $[AC]$ et $[BC]$.
  - Si M est un point du triangle ABC, n'appartenant pas aux côtés de ce triangle.
    Soit P le point d'intersection de (AM) et de (BC). Comme P est sur $[BC]$ ($P \neq B$ et $P \neq C$), il existe deux réels b' et c' positifs strictement tels que P est barycentre de $\{(B,b');(C,c')\}$.
    De plus M est sur $[AP]$, donc il existe deux réels a et λ positifs tels que M est barycentre de $\{(A,a);(P,\lambda)\}$.
    On a alors $a\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}$, et $a\overrightarrow{MA} + \lambda\left(\dfrac{b'}{b'+c'}\overrightarrow{MB} + \dfrac{c'}{b'+c'}\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0}$
    On a alors $a > 0$, $b = \dfrac{\lambda b'}{b'+c'} > 0$ et $c = \dfrac{\lambda c'}{b'+c'} > 0$ et M est le barycentre de $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.
- Soit M barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ avec a, b et c trois réels positifs ou nuls.
  Alors l'une des trois sommes $a+b$, $b+c$ ou $a+c$ est non nulle (sinon la somme $a+b+c$ serait nulle).
  On suppose $a+b \neq 0$ et soit H le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$. On en déduit que M est barycentre de $\{(H,a+b);(C,c)\}$ avec $a+b$ et c positifs ou nuls et $a+b+c \neq 0$. Donc M est un point du segment $[CH]$ et M est bien un point du triangle ABC.

Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$.

Théorème

Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(\alpha; \beta; \gamma)$.

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à$\mathcal{D}$ si, et seulement si :

il existe un réel k tel que $\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$

Démonstration

$M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

En traduisant cette dernière égalité à l'aide des coordonnées, on obtient : $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$

Définition

Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(\alpha; \beta; \gamma)$.

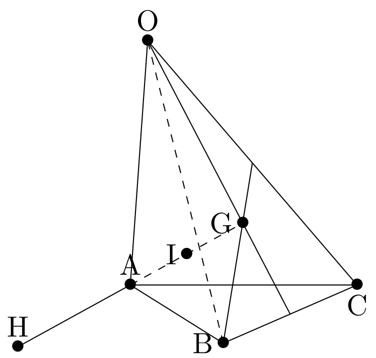
$\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ est **une représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque

Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

Exercice

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$, on considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; -1)$ et $C(2; 1; -3)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AG) et donner les coordonnées d'un point de cette droite (distinct de A ou G)



L'isobarycentre G du triangle OBC a pour coordonnées : $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

La droite (AG) a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{AG}\left(-\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{13}{3}\right)$ donc aussi le vecteur $\vec{u}(2; 5; 13)$.

Or un point M de l'espace est situé sur la droite (AG) si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Si l'on désigne par $(x; y; z)$ les coordonnées de M, cela revient à :

$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 5t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 13t \end{cases}$

Ceci est un système d'équations paramétriques de la droite (AG).

Par exemple, le paramètre de I milieu de $[AG]$ est $-\frac{1}{6}$, celui de A est 0 et celui de G est $-\frac{1}{3}$.

Le point H de paramètre $\frac{1}{3}$ vérifie $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\vec{u} = -\overrightarrow{AG}$, donc H et G sont symétriques par rapport à A.

On peut remarquer que les points de paramètres t et $-t$ dans le repère $(A; \vec{u})$ sont toujours symétriques par rapport à A.

Exercice

Etudier la position de d et d' définies par :

$$d : \left\{\begin{array}{l} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -3t-3 \\ z = -t+1 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

Solution

d et d' ont pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1;-3;-3)$ et $\overrightarrow{u'}(1;-3;-1)$. Puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi d et d' sont soit sécantes, soit non coplanaires. Précisons leur position en examinant leur intersection. Il s'agit de résoudre le système : $\left\{\begin{array}{l} t+1 = s \\ -3t+2 = -3s-3 \\ -3t+3 = -s+1 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} t-s = 1 \\ -3t+3s = -5 \\ -3t+s = -2 \end{array}\right.$

Les deux premiéres équations sont incompatibles et ce système n'admet pas de solution. Donc d et d' sont non coplanaires.