Calcul de limites

Limites et opérations

Les tableaux liés aux opérations sur les limites utilisés avec les suites peuvent être réinvestis
Ils permettent d'obtenir des résultats limites de manière directe :

Exemple

Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - x)$

Les formes indéterminées

On ne s'intéressera ici qu'aux cas particuliers des formes indéterminées

1. Forme indéterminée $(\infty - \infty)$

Etude d'un exemple

Soit f définie par $f(x) = x^3 - 100000x^2$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\cdots\cdots$
  On reconnait en effet la forme indéterminée « »
- Lorsque x tend vers $+\infty$ on a par contre la forme indéterminée
  Pour lever l'indétermination il suffit de factoriser par x^3 qui est le terme dominant
  $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{100000}{x}\right)$ pour $x > 0$
  On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{100000}{x}\right) = 1$ On reconnait en effet la forme limite « »
  donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ On reconnait en effet la forme limite « »

Cette méthode (mise en facteur du terme dominant) conduit à

Régle opératoire 1

La limite en $+\infty$ (resp en $-\infty$) d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré

Exemple

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^4 - 5x^3 + x^2 - 3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\cdots\cdots) =$

2. Forme indéterminée : $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

   Etude d'un exemple

   Soit f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{-x^2 + 100}$ sur $]10; +\infty[$

   On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\cdots\cdots) =$

   Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 100) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\cdots\cdots) =$

   On reconnait la forme indéterminée « »

   On factorise numérateur et dénominateur par leurs termes dominants respectifs :

   $$f(x) = \frac{3x^2 - x}{-x^2 + 100} = \frac{x^2\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(-1 + \frac{100}{x^2}\right)} \qquad \text{Donc :} \quad f(x) = \frac{3 - \frac{1}{x}}{-1 + \frac{100}{x^2}}$$

   Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right) =$ Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \dfrac{100}{x^2}\right) =$

   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = =$ On reconnait en effet la forme limite « $\left(\dfrac{3}{-1}\right)$ »

   Cette méthode (mise en facteur du terme dominant) conduit à

   Régle opératoire 2

   La limite en $+\infty$ (resp en $-\infty$) d'un fonction quotient de deux fonctions polynômes est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré

   Exemple

   $$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{8x^3 - 3x^2 + x + 90}{2x^4 - 51}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)$$

   Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{8x^3 - 3x^2 + x + 90}{2x^4 - 51}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (4x) = +\infty$

   Attention

   Les régles opératoires précédentes s'appliquent uniquement lorque la variable tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

3. Forme indéterminée : « $(0 \times \infty)$ »

   En général la forme indéterminée $(0 \times \infty)$ peut se traiter comme la forme indéterminée « $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ »

   En effet « $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ » donne « $\left(\dfrac{1}{\infty} \times \infty\right)$ » qui donne : « $(0 \times \infty)$ »

4. Forme indéterminée : $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

   Cette forme indéterminée est caractéristique des calculs de nombre dérivés : On rappelle que f est dérivable en a de nombre dérivé L si et seulement si :

   $$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L = f'(a)}$$

   Par exemple : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^0 = 1$

   Attention : toutes les formes indéterminées $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ne sont pas de cette forme de taux d'accroissement .

   Il n y a pas de méthode particulière à souligner danc ces cas de figure.

Limites des fonctions composées

Régle opératoire 3

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur un intervalle J tel que : pour tout x de J $g(x)$ appartient à J

On note h la fonction g suivie de f

a , b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

On suppose que : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = c$

Autre présentation

$$\begin{array}{ccccc}
x & \longrightarrow & g(x) & \longrightarrow & f(g(x)) \\
\text{tend vers} & & X & \longrightarrow & f(X) \\
 & & \text{tend vers} & & \text{tend vers} \\
a & & b & & \boxed{c}
\end{array}$$

Exemple

Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9 - \dfrac{1}{x}}$

Posons $X = 9 - \dfrac{1}{x}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(9 - \dfrac{1}{x}\right) = 9$ Donc : $X \mapsto 9$ lorsque $x \mapsto +\infty$

Or : $\lim\limits_{X \to 9} \left(\sqrt{X}\right) = \sqrt{9} = 3$

Donc , d'après la règle opératoire précédente : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9 - \dfrac{1}{x}} = 3$

Autre présentation

$$\begin{array}{ccccc}
x & \longrightarrow & 9 - \dfrac{1}{x} & \longrightarrow & \sqrt{9 - \dfrac{1}{x}} \\
\text{tend vers} & & X & \longrightarrow & \sqrt{X} \\
 & & \text{tend vers} & & \text{tend vers} \\
+\infty & & 9 & & \boxed{\sqrt{9} = 3}
\end{array}$$

Exercice

1. Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0.6x+12}$

2. Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

LIMITE PAR COMPARAISON

Théorème des gendarmes

Théorème

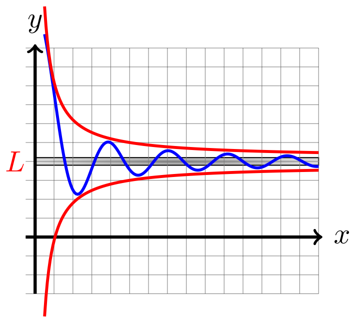
on considère trois fonctions f , g et h définies au voisinage de $+\infty$ et L un nombre réel

on suppose que :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$
- Il existe A tel que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \geq A$

Alors

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



Remarque

Le théorème s'adapte au voisinage de $-\infty$ ou au voisinage d'un réel a

Exercice

Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5cos(x) + 3}{x^2}\right)$

Comparaison et limites

Théorème

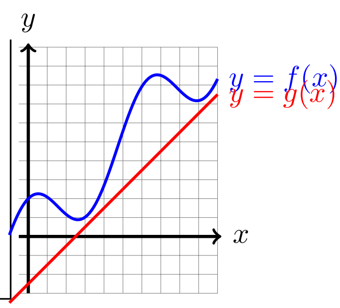
on considère deux fonctions f et g définies au voisinage de $+\infty$

on suppose que :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- Il existe A tel que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \geq A$

Alors

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Remarque

Le théorème s'adapte au voisinage de $-\infty$ ou au voisinage d'un réel a

Exercice

Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2cos(x) + x)$