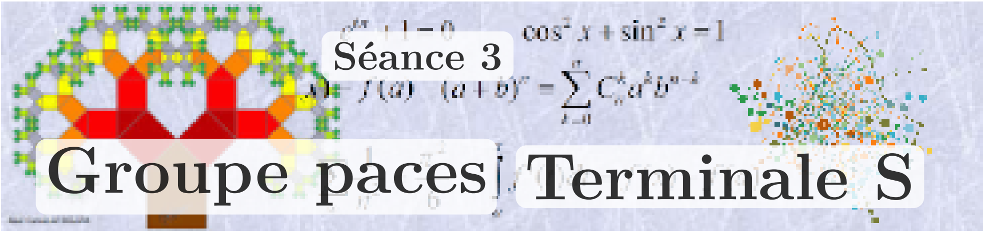
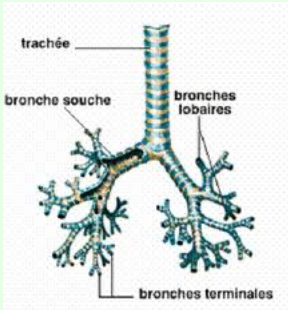
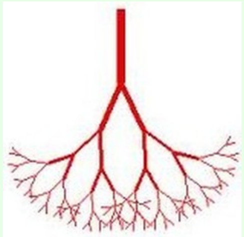


Introduction

la notion de fractale en mathématiques est très présente pour **modéliser** certaines structures du corps humain.

En voici un exemple :





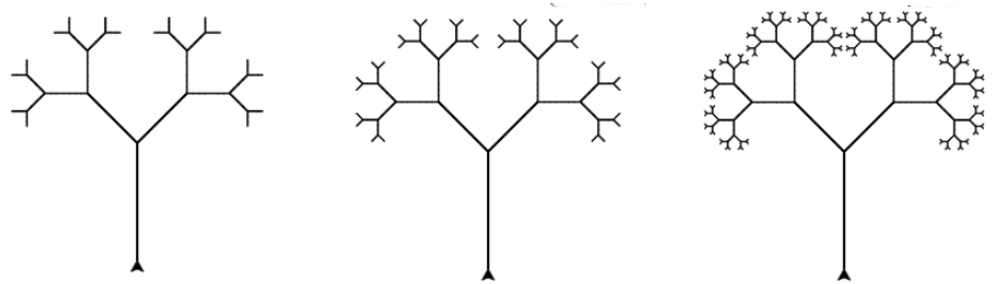
Nous n'étudierons pas la notion de fractale (qui n'est pas au programme de terminale) mais je vous en donne tout de même la définition wikipedia :
Le terme « fractale » est un néologisme créé par le mathématicien Benoît Mandelbrot en 1974 à partir de la racine latine fractus, qui signifie brisé, irrégulier. Plus généralement, une fractale désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle. (Autosimilarité)
Voici une page pour une information plus riche :
`https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/mathematiques-fractales-curiosite-mathematique-234/page/2/` Et si vous voulez en savoir davantage sur Benoit Mandelbrot :
`https://www.futura-sciences.com/sciences/personnalites/mathematiques-benoit-mandelbrot-1317/`

Entraînement et apprentissage

Exercice 1 : Structure du poumon

On considère cette structure :

Etape 3 Etape 4 Etape 5



La construction utilise la librairie turtle de python :

```
from turtle import *
left(90)
def y(l):
    if l < 2.5:
      return
    forward(l)
    left(45)
    y(l * 0.6)
    right(90)
    y(l * 0.6)
    left(45)
    forward(-l)
y(100)
```

Vous pouvez visualiser l'effet de ce programme ici : `https://repl.it/@hgurgey/poumon1`

1 calculer, en utilisant les données du programme, la longueur totale de toutes les branches de l'arbre aux étapes 3 , 4 et 5

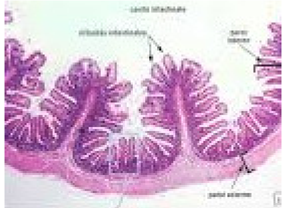
2 Montrer que cette longueur totale à l'étape n est égale à :

$$500\left(1,2^{n+1}-1\right)$$

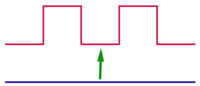
3 Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette longueur

Exercice 2 : L'intestin grêle

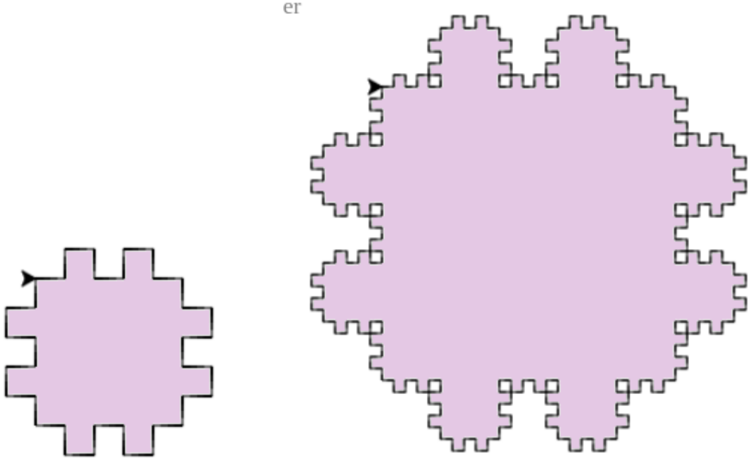
L'intestin grêle possède une forme fractale.
Pour simplifier l'étude (et ainsi travailler dans un plan) on s'intéresse à une coupe d'intestin grêle :



La structure de l'intestin grêle est formée de villosités et de microvillosités successives observables sur différentes échelles, jusqu'aux cellules.
le principe d'autosimilarité étant ici respecté.
On décide de modéliser une coupe de l'intestin grêle par une suite de figures (F_n) construite à partir d'un carré.
Le carré F_1 est un carré de côté 1 .
Puis, on remplace chaque côté de la manière suivante :



Le procédé est alors itéré.
Voici ce que l'on obtient après 1 itération puis après 2 itérations :



On construit donc ainsi une suite de figures dont on notera P_n le périmètre etA_n l'aire.

1 On note C_n le nombre de côté de F_n.
Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
Exprimer C_n en fonction de n

2 On note d_n la longueur de chaque côté de F_n.
Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
Exprimer d_n en fonction de n

3 En déduire l'expression de P_n en fonction de n

4 Etudier le comportement à l'infini de la suite (P_n)

5 Expliquer la formule de récurrence ci dessous :

$$A_{n+1} = A_n + 2 \times C_n \times \left(\frac{d_n}{5}\right)^2$$

6 Montrer que :

$$A_{n+1} = A_n + \frac{8}{25} \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$$

7
(a) On pose $u_n = A_{n+1} - A_n$
Exprimer u_n en fonction de n puis exprimer la somme des n premiers termes de u_n

(b) Justifier que $A_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_n + 1$
En déduire l'expression de A_n en fonction de n

(c) Etudier le comportement à l'infini de la suite (P_n)

8 Quelle conclusion peut-on faire ?

Exercice 3 : Taux d'alcoolémie

Lorsque l'on consomme de l'alcool (bien sur cela ne saurait vous concerner!!) le taux d'alcool dans le sang, mesuré en gramme par litre varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption.
Ce taux est appelé : *taux d'alcoolémie*.
Voici un document qui montre comment l'évolution du taux d'alcoolémie est en général modélisé :

Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) à l'instant t (en heure) de son organisme. On considère que f est définie par l'équation différentielle:

$$\frac{df}{dt} = a\exp(-t) - f(t),$$

dans laquelle a est une constante positive dépendant de la personne elle-même et de la quantité absorbée, avec la condition initiale $f(0) = 0$.

Dans cet exercice,on considérera que le taux d'alcoolémie d'une personne donnée est modélisé par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ solution de l'équation différentielle :

$$(E): \ y' = 1,5e^{-t} - y$$

1 Vérifier que la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = 1,5te{-}t$ est une solution possible de l'équation différentielle (E)

2 On considère une personne dont le taux d'alcoolémie est modélisé par la fonction f précédente

(a) Donner une valeur approchée du taux d'alcoolémie 2 heures après l'absorption d'alcool.

(b) Déterminer la limite de $f(t)$ en $+\infty$.

(c) Etudier les variations de la fonction f puis établir le tableau des variations de f

3 Au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie est-il le plus élevé pour la personne considérée ?
Donner une valeur approchée de ce taux à 10^{-2} près.

4 En France, le taux d'alcoolémie autorisé pour un conducteur est de 0,5 g/l.
sachant que la personne a absorbé 30 grammes d'alcool pur à 12h, a quelle heure pourra-t-elle reprendre le volant de son véhicule ?

Exercice 4 : Taux d'alcoolémie (bis)

Un conducteur arrêtée par la gendarmerie au maximum de son ébriété prétend n'avoir bu qu'un peu de vin à 12 degrés.
Déterminer la quantité d'alcool absorbé (on rappelle que le corps humain contient environ 6 litres de sang).
On reprendra l'idée du modèle précédent

Information

- Un vin à 12° contient 12 ml d'alcool pur pour 100 ml de vin.
- Un ml d'alcool pèse environ 0,8 g

Exercice 5 : Encore un peu d'alcool !

Quand le Capitaine Haddock boit du whisky,l'alcool passe directement de l'intestin dans son sang.
Une petite quantité est aussi transportée aux poumons via la veine porte,ce qui donne à notre héros son haleine caractéristique.
Le reste va au cerveau,ce qui le met dans cet état bien connu appelé ivresse.
Pour finir l'alcool arrive au foie qui l'élimine en l'oxydant.
On modélise la situation en considérant que l'alcoolémie (quantité d'alcool par litre de sang) est solution de l'équation différentielle : $\boxed{(E) \quad y' + y = ae^{-t}}$
(où a est une constante dépendant de la quantité d'alcool absorbée et du poids à jeun du capitaine et t exprimé en heure)
Dans la suite on supposera que $a = 5$

1 Déterminer l'expression du taux d'alcoolémie au cours du temps (sachant que ce taux est nul au temps $t = 0$)

2 Déterminer le taux maximal d'alcoolémie, le temps au bout duquel il est atteint ainsi que le temps que le Capitaine Haddock devra attendre pour pouvoir conduire à nouveau pour ne pas être en infraction avec la loi française

Approfondissement

Exercice 6 : Dissolution

Lorsqu'une substance se dissout,on peut considérer que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité qui reste à dissoudre.
On place donc 10 kg de sel à l'instant $t = 0$ dans une grande quantité d'eau,et on note $f(t)$ la quantité de sel dissoute à l'instant t

1 Écrire une équation différentielle vérifiée par f

2 Sachant que le premier kilo est dissout en 5 minutes, déterminer la fonction f

3 Au bout de combien de temps la moitié du sel a-t-elle été dissoute ?

Exercice 7 :

On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10% de sa masse par minute. Sa masse initiale est de 10 kg.
L'affirmation suivante est elle vraie ? À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g