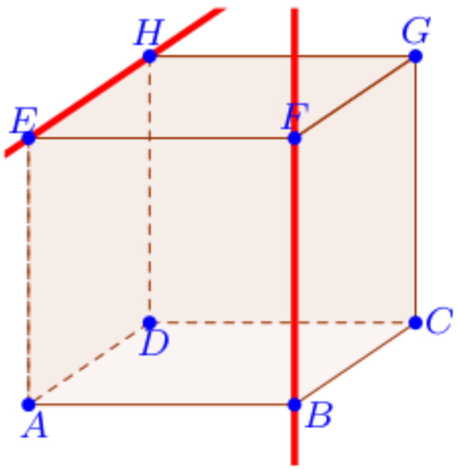
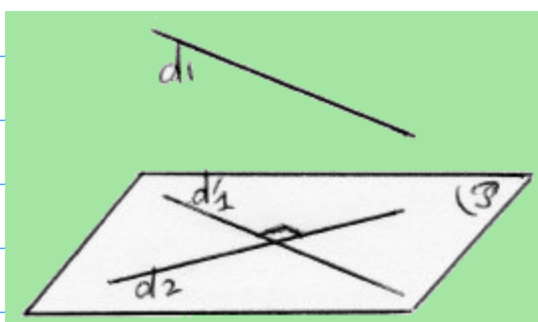
Séance du vendredi 26 juin

Thèmes :
- I) Orthogonalité dans l'espace
- II) Produit scalaire dans l'espace
- III) Équations cartésiennes de plan

I) Orthogonalité dans l'espace

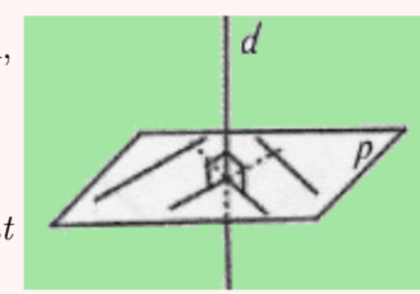
e





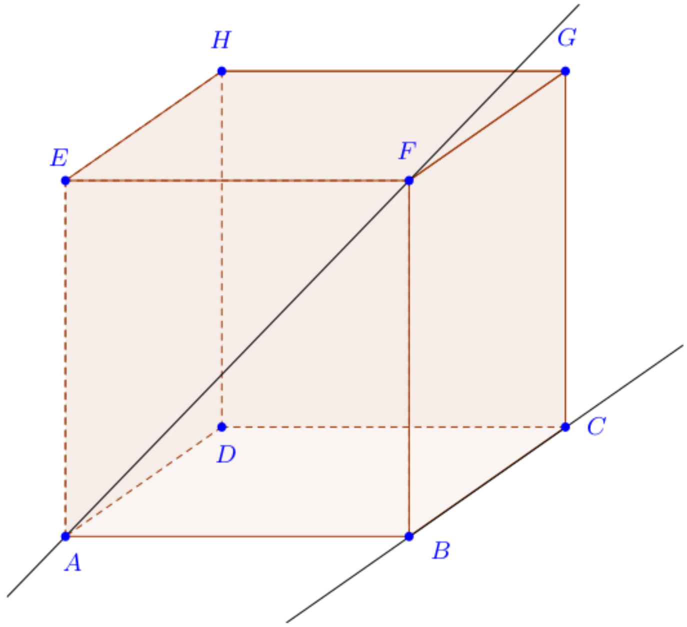
Théorème de la porte (ADMIS)

Dès qu'une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est orthogonale à toutes les droites du plan .
On dit alors qu'elle est orthogonale au plan.
On peut aussi dire qu'elle est perpendiculaire au plan.
En effet, la situation exposée impose que la droite et le plan soient sécants



On considère un cube $ABCDEFGH$

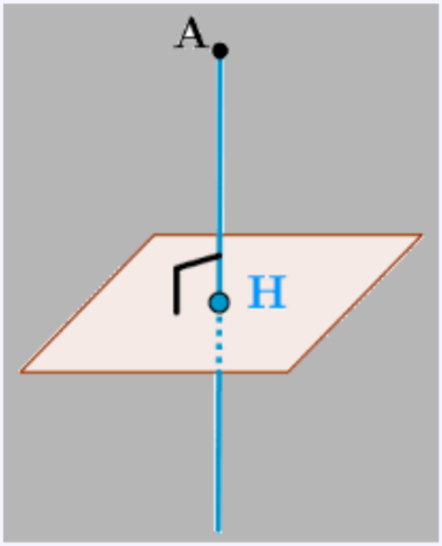
1 Montrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ABF)

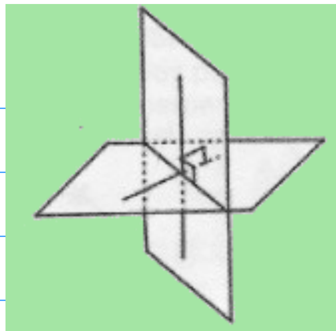


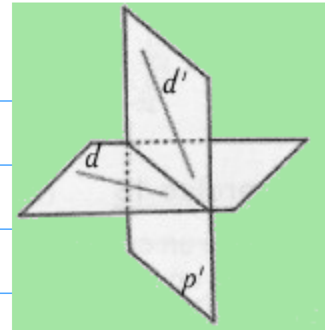
2 En déduire que les droites (AF) et (CB) sont orthogonales.

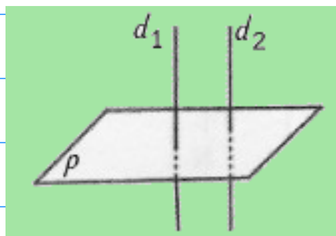
Définition : Projection orthogonale

Par un point A de l'espace il passe un unique droite (D) orthogonale à un plan (P).
Le point d'intersection de la droite d et du plan P est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan P.
Ci-contre H est le projeté orthogonal de A sur le plan



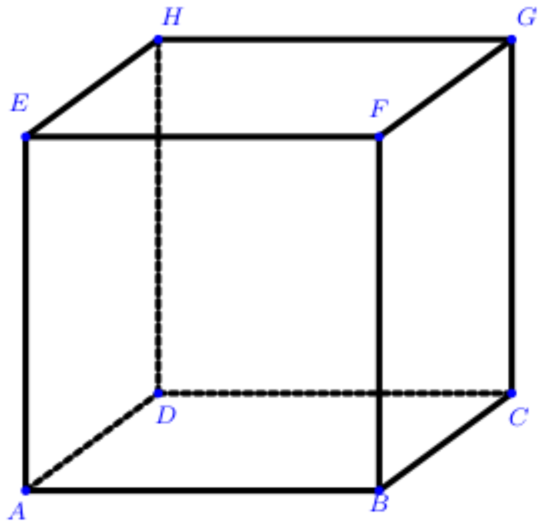



d'
d
p'


d_1
d_2
p

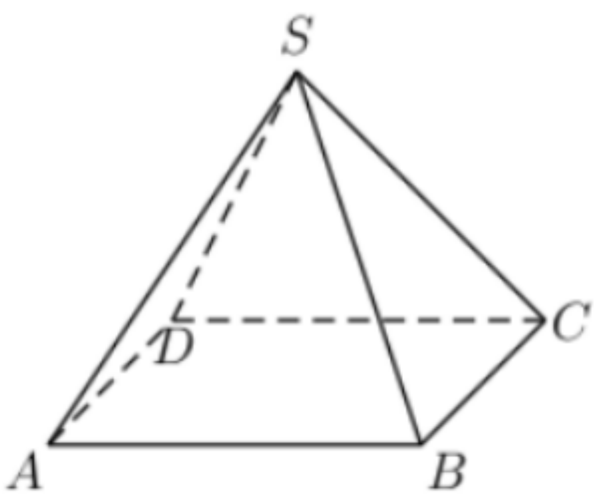
II) Produit scalaire dans l'espace

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4



Calculer les produits scalaires ci dessous :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$
- $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}$



$SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S et dont toutes les arêtes ont la même longueur a.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$ b) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$

c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Propriétés

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent vraies dans l'espace :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\ \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$
- Le calcul du produit scalaire à l'aide d'une projection.
- Les règles de calcul : symétrie, associativité, distributivité linéarité.

Propriétés

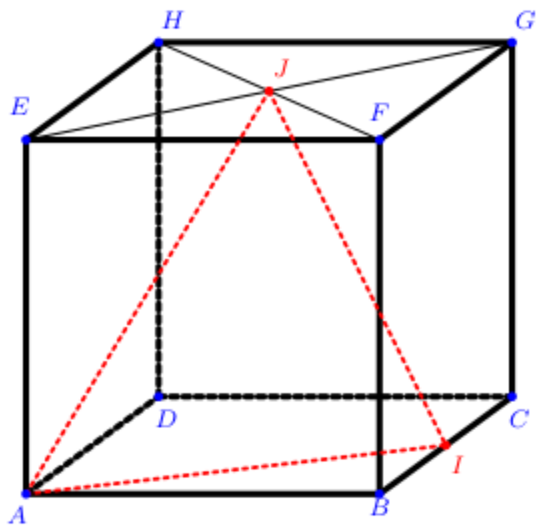
Il faut néanmoins adapter l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées :
Dans un repère *orthonormal*, pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}(\ x\ ;\ y\ ;\ z\ )$ et $\overrightarrow{v}(\ x'\ ;\ y'\ ;\ z'\ )$:

$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$

Conséquences

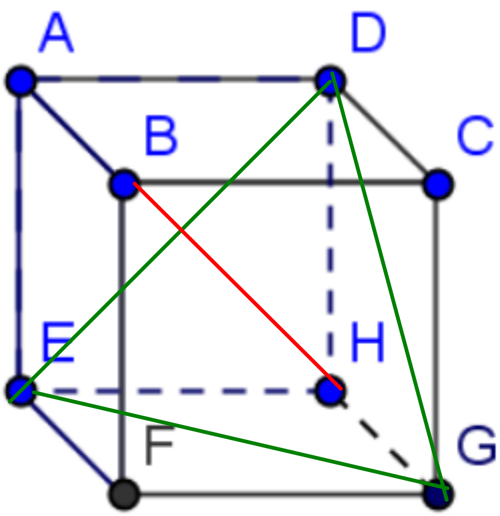
Dans un repère orthonormal avec $\vec{u}(x; y; z)$; $A\,(x_A; y_A; z_A)$ et $A\,(x_B; y_B; z_B)$

- $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$



On considère un cube $ABCDEFGH$
On note I le milieu de $[BC]$ et J le centre de la face $EFGH$
Déterminer une mesure approchée à un degré près de l'angle $\widehat{IAJ}$

On considère un cube ABCDEFGH



Démontrer que la diagonale (BH) est perpendiculaire au plan (EGD)

Définition

On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non nuls et non colinéaires du plan.