COURS DE MATHEMATIQUES
Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom

Les nombres complexes

Equations du second degré

Ce cours porte exclusivement sur la résolution des équations du second degré relatives aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

2 La théorie

2.1 La résolution

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}_\star$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. La résolution de cette équation dépend du signe de son discriminant Δ :

- lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une unique racine réelle (dite double)
$$-\frac{b}{2a}\,;$$
- lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux racines réelles
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune racine réelle, mais admet deux racines complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

3 Attention !

Il ne faut pas appliquer directement les formules de résolution avant d'observer l'équation du second degré considérée car son expression peut parfois être simplifiée, ce qui allège considérablement les calculs.

4 Les astuces

Lorsqu'une équation du second degré admet deux racines complexes, les deux racines sont conjuguées.

5 Exercices pratiques

5.1 Exercice 1

Résoudre l'équation du second degré $2x^2 - 3x + 2 = 0$.

Avant de résoudre l'équation, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications de l'équation considérée. Ici, l'expression de l'équation ne peut pas être simplifiée.

La méthode consiste à calculer le discriminant Δ de l'équation, puis à envisager les racines en fonction de son signe.

$$\begin{gathered}\Delta = b^2 - 4ac\\ \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2\\ \Delta = 9 - 16\\ \Delta = -7 = (i^2) \times 7 = (i\sqrt{7})^2\end{gathered}$$

Le discriminant Δ de l'équation est négatif. L'équation du second degré admet donc deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad &\text{et}\quad z_2 &= \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\\ z_1 &= \frac{-(-3) - i\sqrt{7}}{2 \times 2} \quad &\text{et}\quad z_2 &= \frac{-(-3) + i\sqrt{7}}{2 \times 2}\\ z_1 &= \frac{3 - i\sqrt{7}}{4} \quad &\text{et}\quad z_2 &= \frac{3 + i\sqrt{7}}{4}\\ z_1 &= \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} \quad &\text{et}\quad z_2 &= \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

L'équation du second degré $2x^2 - 3x + 2 = 0$ a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$ et $z_2 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}$.

5.2 Exercice 2

Résoudre l'équation du second degré $4x^2 + 2x + 1 = 0$.

Avant de résoudre l'équation, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications de l'équation considérée. Ici, l'expression de l'équation ne peut pas être simplifiée.

La méthode consiste à calculer le discriminant Δ de l'équation, puis à envisager les racines en fonction de son signe.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times 1$$
$$\Delta = 4 - 16$$
$$\Delta = -12 = (i^2) \times 12 = (i\sqrt{12})^2 = (i2\sqrt{3})^2$$

Le discriminant Δ de l'équation est négatif. L'équation du second degré admet donc deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2.

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$
$$z_1 = \frac{-2 - i2\sqrt{3}}{2 \times 4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + i2\sqrt{3}}{2 \times 4}$$
$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}$$
$$z_1 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'équation du second degré $4x^2 + 2x + 1 = 0$ a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5.3 Exercice 3

Résoudre l'équation du second degré $x^2 + 4 = 0$.

Avant de résoudre l'équation, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications de l'équation considérée. Ici, l'expression de l'équation ne peut pas être simplifiée.

La méthode consiste à calculer le discriminant Δ de l'équation, puis à envisager les racines en fonction de son signe.

$$\begin{gathered}\Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ \Delta = 0 - 16 \\ \Delta = -16 = (i^2) \times 16 = (4i)^2\end{gathered}$$

Le discriminant Δ de l'équation est négatif. L'équation du second degré admet donc deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad & z_2 &= \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ z_1 &= \frac{0 - i\sqrt{16}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad & z_2 &= \frac{0 + i\sqrt{16}}{2 \times 1} \\ z_1 &= \frac{-4i}{2} \quad \text{et} \quad & z_2 &= \frac{4i}{2} \\ z_1 &= -2i \quad \text{et} \quad & z_2 &= 2i \end{aligned}$$

L'équation du second degré $x^2 + 4 = 0$ a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = -2i$ et $z_2 = 2i$ qui sont imaginaires pures.

5.4 Exercice 4

Résoudre l'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$.

Avant de résoudre l'équation, il faut s'interroger sur d'éventuelles simplifications de l'équation considérée. Ici, l'expression de l'équation ne peut pas être simplifiée.

La méthode consiste à calculer le discriminant Δ de l'équation, puis à envisager les racines en fonction de son signe.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$$
$$\Delta = 1 - 4$$
$$\Delta = -3 = (i^2) \times 3 = (i\sqrt{3})^2$$

Le discriminant Δ de l'équation est négatif. L'équation du second degré admet donc deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2.

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$
$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2 \times 1}$$
$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$ a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.