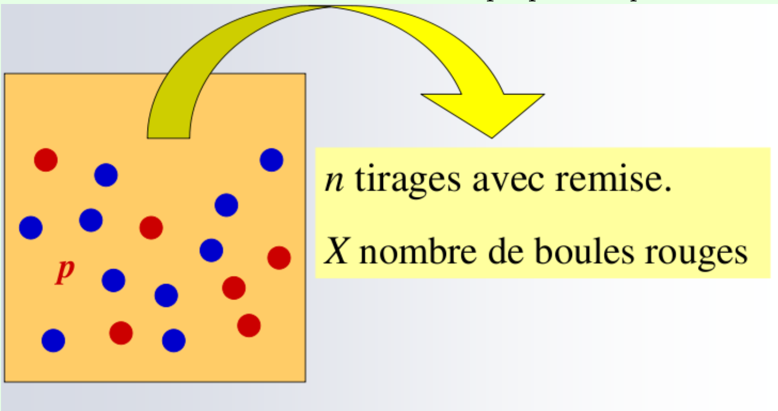
Loi normale

Rappels sur la loi binomiale

L'urne à deux couleurs

On considère une urne contenant une proportion p de boules rouges et $q = 1 - p$ de boules bleues.



On répète n fois l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule de l'urne , noter sa couleur puis la remettre dans l'urne (afin de ne pas modifier les proportions)
On considère alors la variable aléatoire X qui donne le nombre de boules rouges obtenues.
X prend les $n+1$ valeurs entières $\cdots$; $\cdots$; $\cdots\cdots$; $\cdots$.

Rappel

- ✘ Une variable aléatoire qui prend deux valeurs 1 et 0 avec les probabilités p et $q = 1 - p$ suit une loi de $\cdots\cdots\cdots$ de paramètre p
  Son espérance vaut $\cdots\cdots$ et sa variance $\cdots\cdots$
- ✘ On considère n variable aléatoire X_i (i de 1 à n) **indépendante** suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p
  le n-uplet $(X_1; X_2; \cdots\cdots; X_n)$ prend de manière aléatoire des valeurs du type
  $(0;0;1;0;0;\cdots\cdots;1;0;1;1)$; $(1;1;1;0;0;\cdots\cdots;1;0;0;1)$; $\cdots\cdots$
  c'est à dire une alternance au hasard de 0 et de 1
  En sommant toutes ses valeurs on obtient $\cdots\cdots\cdots$ $\cdots$
  La variable aléatoire $X = \sum_{i=0}^{n} X_i$ est une loi binomiale de paramètres n et p : $\boxed{X = B(n, p)}$
  On a : pour tout k nombre entier entre 0 et n $\quad P\left[X = k\right] = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$

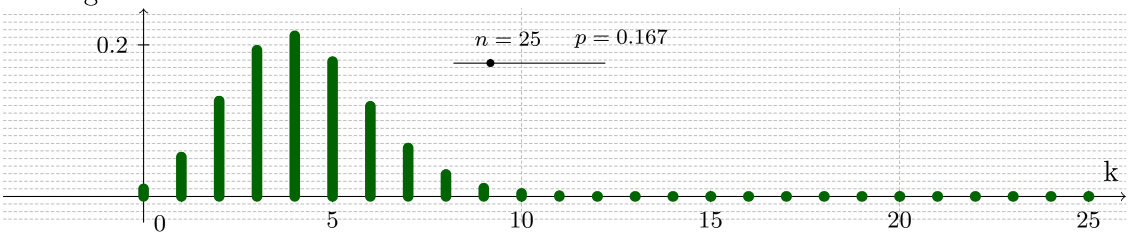
Aspect pratique

Dans la pratique on utilise la loi binomiale lorsque l'on répète de manière indépendante une épreuve à deux issues, l'un étant appelée succès(de probabilité p , l'autre appelée échec (de probabilité $q = 1 - p$) et que l'on s'intéresse au nombre de succès obtenus dans la répétition

Les diverses représentations graphiques

Diagramme en bâton

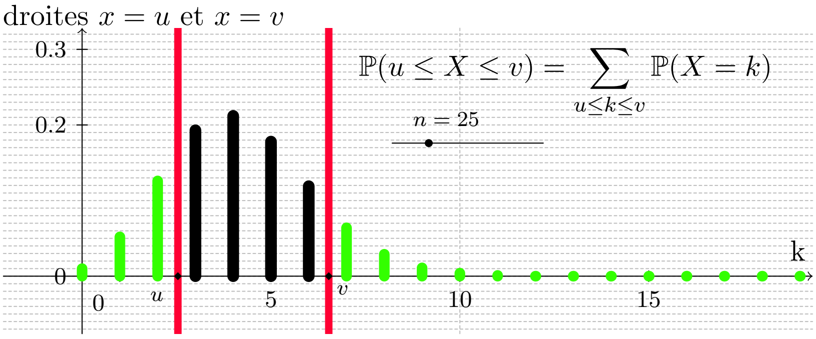
la loi biniomiale $B(n,p)$ étant une loi discrète ($(n+1)$ valeurs) , elle se représente graphiquement par un diagramme en bâton :



Remarquons qu'à partir de $k = 10$ les probabilités deviennent très petites (mais ne sont pas nulles)
Par exemple la calculette donne $P[X = 10] \approx \cdots\cdots\cdots$

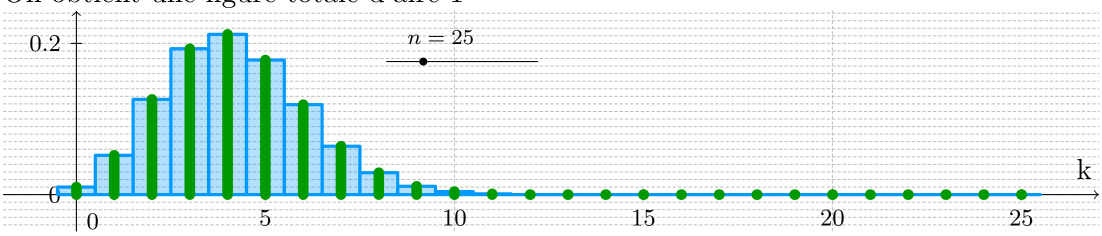
Lecture graphique de $P[u \leq X \leq v]$

Pour lire la probabilité , il suffit de sommer tous les bâtons situés à l'intérieur de la zone définie par les droites $x = u$ et $x = v$



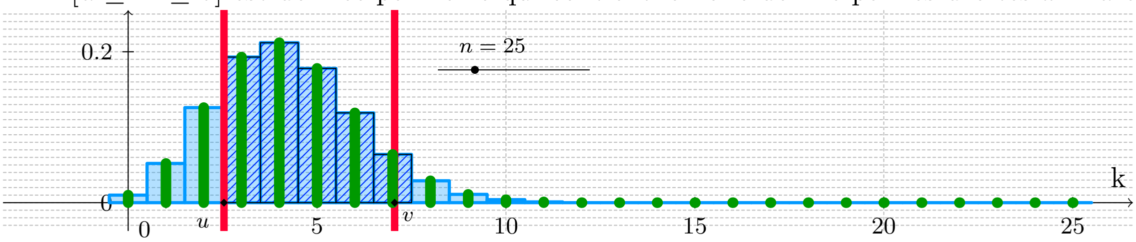
Histogramme

Pour construire l'histogramme, il suffit de remplacer chaque bâton par un rectangle de base 1 centré sur le bâton et de hauteur la probabilité correspondante.
On obtient une figure totale d'aire 1



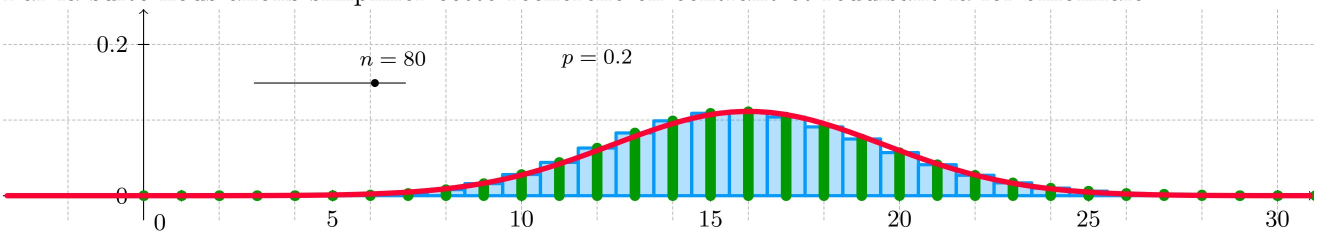
Lecture de $P[u \leq X \leq v]$ sur un histogramme

$P[u \leq X \leq v]$ est donnée par l'aire qui contient la zone définie par les droites $x = u$ et $x = v$:



La courbe en cloche

Il est alors légitime de s'intéresser à une courbe qui épouserait au mieux l'histogramme d'une loi binomiale.
Le problème est qu'il n'est pas évident d'en déterminer une expression algébrique.
Par la suite nous allons simplifier cette recherche en centrant et réduisant la loi binomiale



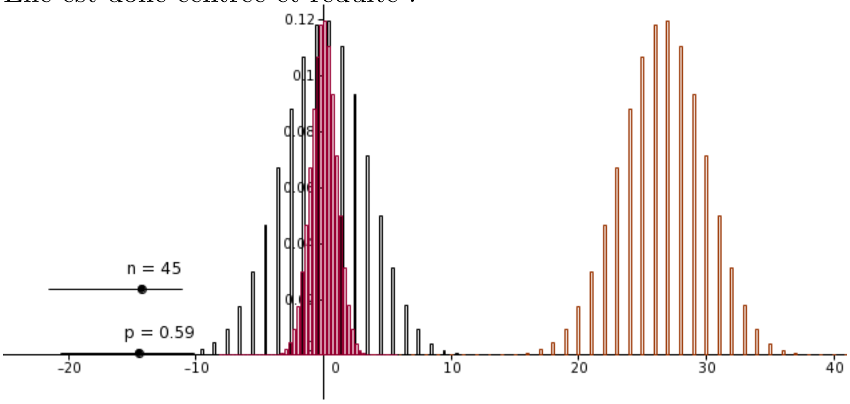
Théorème de Moivre - Laplace

Loi binomiale centrée réduite

Définition
On dit d'une variable aléatoire qu'elle est centrée et réduite si son espérance vaut 0 et si son écart-type vaut 1

Expérimentation

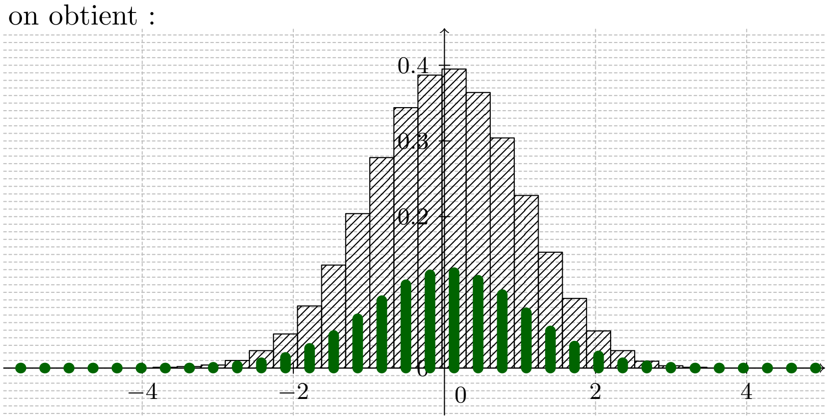
On considère une loi binomiale de paramètre n et p $\quad X = B(n, p)$
Notons m l'espérance de X et σ son écart-type.
La variable aléatoire $X - m$ se « recentre » autour de 0
Son espérance est nulle .
la variable aléatoire $\dfrac{x - m}{\sigma}$ ne dépend plus des paramètres n et p
Son espérance est nulle et son écart-type égal à 1
Elle est donc centrée et réduite :



Histogramme de la binomiale centrée réduite

On considère une loi binomiale de paramètre n et p $\quad X = B(n,p)$
On rappelle que : $\quad m = n \times p \quad$ et $\quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$

- ✘ La variable aléatoire centrée réduite : $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ prend les $(n+1)$ valeurs :
  $\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots}$; $\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots}$; $\cdots\cdots$; $\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots}$
- ✘ L'écart entre deux valeurs est $\dfrac{\cdots}{\cdots}$
  Pour construire l'histogramme on doit construire des rectangles de base $\left[valeur - \dfrac{\cdots}{\cdots} ; valeur + \dfrac{\cdots}{\cdots}\right]$
- ✘ L'aire du rectangle doit être égale à la probabilité . Donc :
  $\dfrac{\cdots}{\cdots} \times$ hauteur du rectangle = probabilité
  Donc : hauteur du rectangle = $\cdots\cdots\cdots$
- ✘ on obtient :

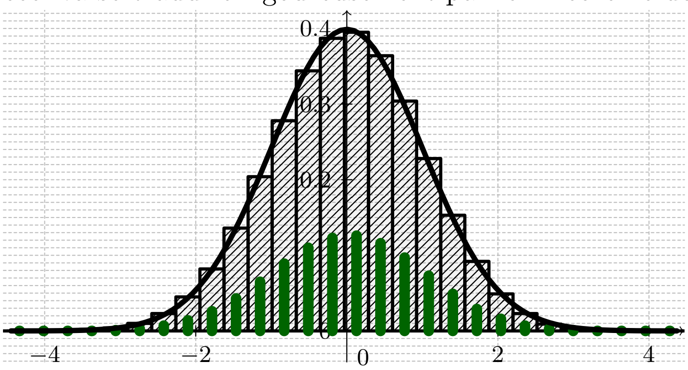


La loi normale

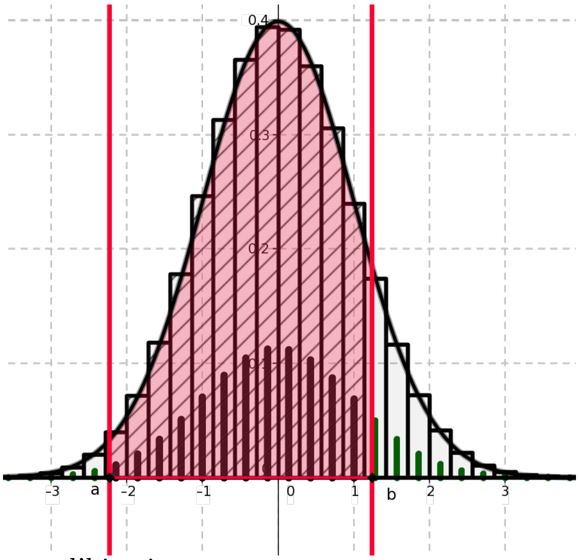
L'histogramme de la loi binomiale centrée réduite est indépendante de n et p
la courbe qui épouse l'histogramme sera plus facile à déterminer
Le mathématicien Abraham de Moivre, protestant français émigré en Angleterre après la révocation de l'édit de Nantes (1685), a découvert que cette courbe est la courbe représentative de la fonction

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

On observe sur Geogebra que l'approximation de l'histogramme par la courbe s'améliore lorsque n augmente.
ceci va se traduire rigoureusement par le Théorème de Moivre- Laplace (dit T.M.L) ci-dessous.



Théorème de Moivre- Laplace (TML) (ADMIS)



Théorème de Moivre- Laplace

On suppose que X_n suit la loi binomiale $B(n;p)$

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ variable aléatoire centrée réduite associée à X_n

Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

Un peu d'histoire

> Voici ce que dit Laplace à propos des travaux de Moivre :
> « Moivre a repris dans son ouvrage [The doctrine of Chances] le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats déterminés par un grand nombre d'observations .
> Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver approche sans cesse de celui de leurs possibilités respectives, il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports soit contenue dans des limites données. »