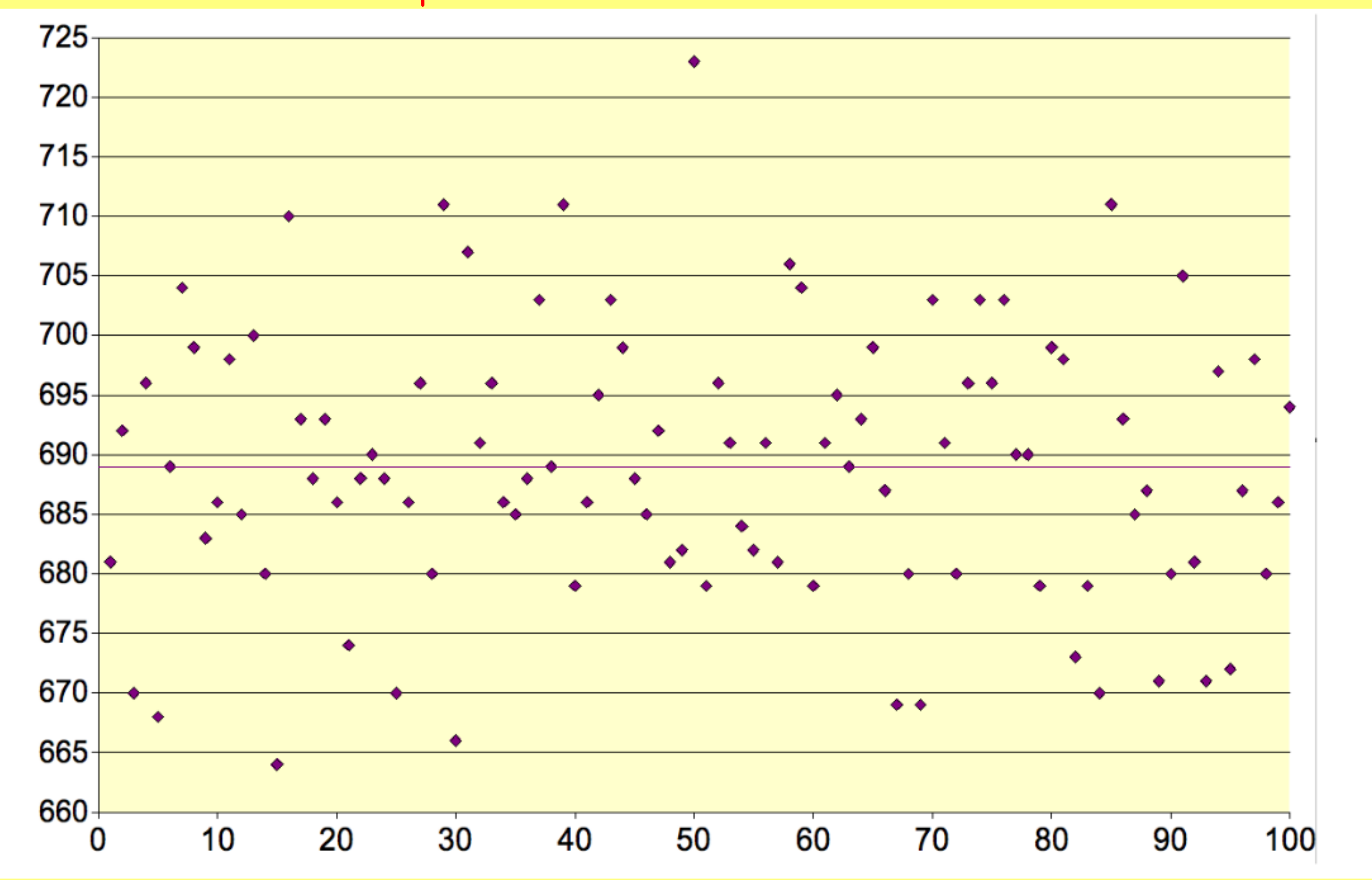
Document 1

Document 2

Rodrigo Partida had been indicted in March, 1972, in Hidalgo County, a border county of southern Texas, for burglary of a private residence at night with intent to rape. After a trial before a petit jury, respondent was convicted and sentenced to eight years in the custody of the Texas Department of Corrections.

He first raised his claim of discrimination in the grand jury selection process on a motion for new trial in the State District Court : the 1972 census showed that 79,1% of the county were Mexican Americans but the grand jury that indicted him had only 339 Spanish surnamed members.

(selection ~> 870 personnes)



Intervalle de fluctuation de la classe de Seconde

Théorème ADMIS

On prélève un échantillon de taille n dans une population où la fréquence théorique d'un caractère est p

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- ✘ $n \geq 25$
- ✘ $0,2 \leq p \leq 0,8$

Alors :

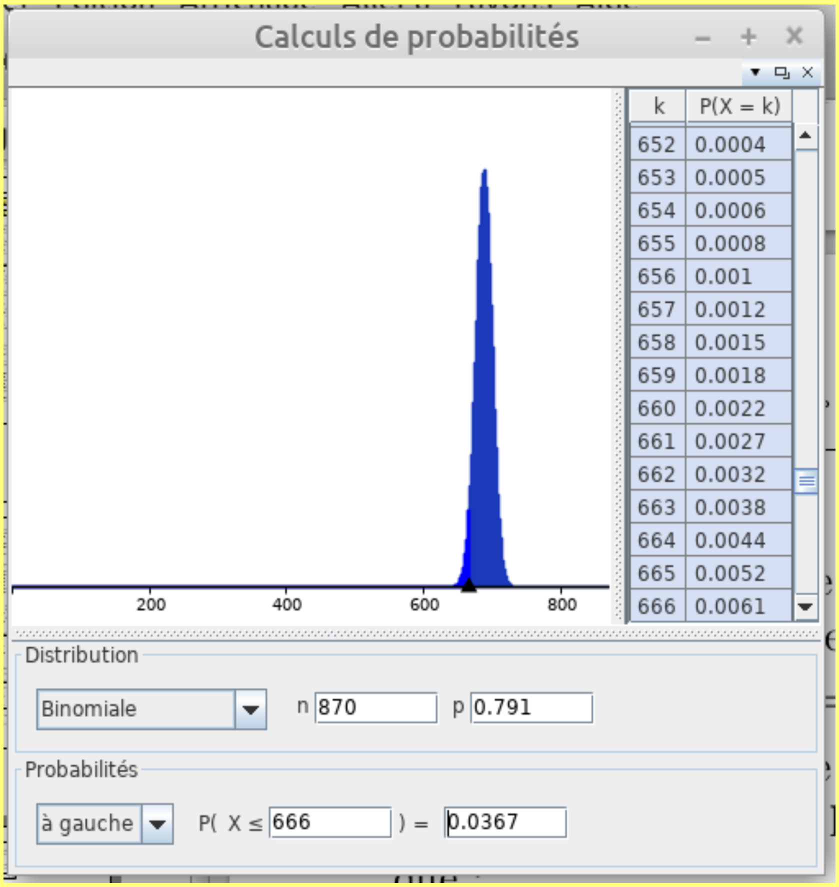
La probabilité que cet échantillon donne une fréquence observée appartenant à l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} : p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est supérieure ou égale à $0,95$.

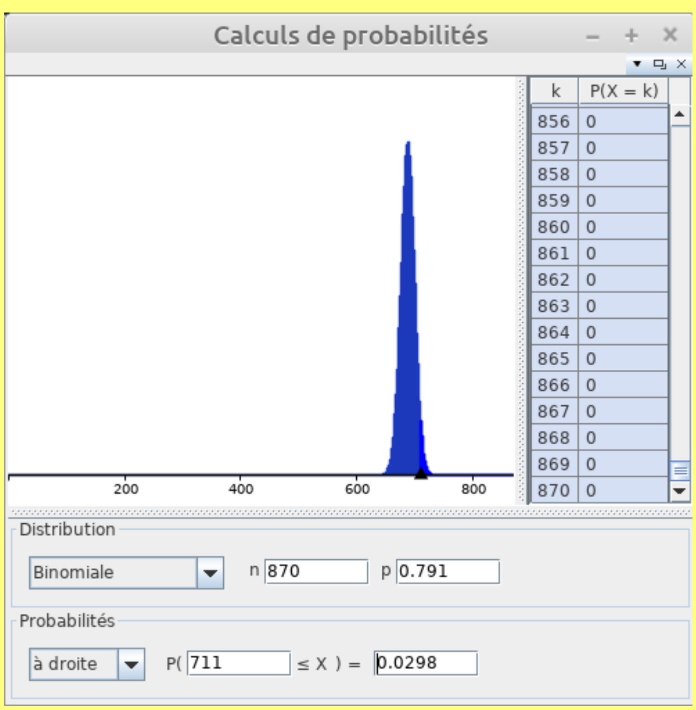
I est appelé intervalle de fluctuation (IF-Seconde) de la fréquence observée au seuil 95%

Intervalle de fluctuation (classe de 1ère)

IF Exact

Pour obtenir l'intervalle de fluctuation exact au seuil 95% il suffit de déterminer :
le plus petit entier a et le plus entier b (C'est à dire le plus petit intervalle $[a; b]$ au sens de l'inclusion) tels que :
$\boxed{P(X \leq a) \leq 0,025}$ et $\boxed{P(X \geq b) \leq 0,025}$.





Intervalle de fluctuation asymptotique . Classe de Terminale

L'intervalle de fluctuation de seconde est imprécis et (pour l'instant) non justifié.
L'intervalle de fluctuation exact est plutôt compliqué à obtenir
Nous allons utiliser le théorème de Moivre-Laplace et la valeur $u_{0,05}$ de la loi normale pour obtenir un intervalle de fluctuation plus précis que l'intervalle de seconde et plus facie à calculer que l'intervalle exact.

Rappel : Théorème de Moivre-Laplace

On suppose que X_n suit la loi binomiale $B(n;p)$
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ variable aléatoire centrée réduite associée à X_n
Alors, pour tous réels α et β tels que $\alpha < \beta$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(\alpha < Z_n < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = P(\alpha < T < \beta)$$

Avec T loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

Remarque

Quand on sait qu'une suite converge vers une limite L, on peut considérer que pour n assez grand le terme de rang n constitue une approximation de L.
Ici, on inverse les rôles. On connaît la limite, mais pas les valeurs des termes de la suite.
On admet donc que, sous certaines conditions, on peut approcher le terme de rang n de la suite par la limite L

Rappel : Théorème de Moivre-Laplace appliqué au seuil 95%

On suppose que X_n suit la loi binomiale $B(n;p)$
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ variable aléatoire centrée réduite associée à X_n
On a : $P(-1.96 < Z_n < 1,96) \approx 0,95$

retour à notre étude :

$n = 870$

$np = 870 \times 0,791 \simeq 688$

$\sqrt{np(1-p)} \simeq 12$

on a donc

$$-1,96 < \frac{X_n - 688}{12} < 1,96$$

$$\Rightarrow 664,48 < X_n < 711,52$$

$$\Rightarrow \boxed{0,76 < \frac{X_n}{870} < 0,818}$$

D'une manière générale :

$$P\left(-1,96 \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1,96\right) \approx 0,95$$

$$\Rightarrow P\left(np - 1,96\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + 1,96 \times \sqrt{np(1-p)}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right.$$

D'où l'intervalle de fluctuation asymptotique

$$IF_a = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

On estime en France que 65% de la population part en vacance d'été .

1 On choisit 1000 Français au hasard .
Donner l'intervalle de fluctuation au seuil 95% associé à cette problématique

2 On a interrogé cette fois mille habitants de Paris.
Dans cet échantillon, la proportion de personnes partant en vacances d'été est $0,72$ (ou 72%.
Interpréter ce résultat.

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètre et 1,65 millimètre.

a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

b. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.

Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient à l'intervalle $[298 ; 302]$. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

b. Décide-t-on de réviser la machine ? Justifier la réponse.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaine de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2.
Une étude menée sur la production a permis de constater que :

— 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;

— parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;

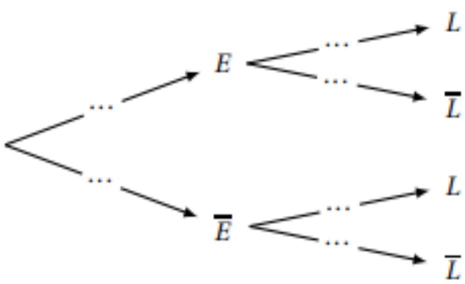
— 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements :

— E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;

— L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.

2. Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.

Estimation (Intervalle de confiance)

Lors d'un sondage auprès de 1 000 personnes aux États-Unis avant les élections de 2012, on a recueilli une intention de vote de 52,2 % pour M. Obama contre 47,8 % pour M. Romney. On fait l'hypothèse que les électeurs ont répondu honnêtement et qu'ils ne changeront pas d'avis avant les élections.
Compléter :

1. Au risque 5 % de se tromper on peut affirmer que le jour de l'élection la pourcentage de votants pour Obama sera dans l'intervalle ....
2. Au risque 5 % de se tromper on peut affirmer que le jour de l'élection la pourcentage de votants pour Obama sera dans l'intervalle ....
3. L'équipe de campagne de M. Obama peut-elle être sereine quant à l'issue de l'élection ?
   Réponse argumentée