III) Equations cartésiennes du plan

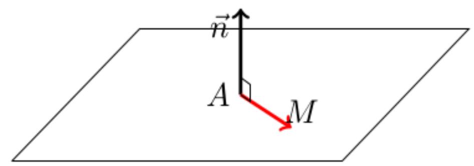
1) Caractérisation d'un plan avec un point et un vecteur "normal"

Caractérisation d'un plan

Un point A et un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ étant donnés dans l'espace, l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

est un plan.
On dit qu'il s'agit du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.



Dans la suite, on travaille dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exemple : On considère le point $A(1,2,1)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

On note (P) le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

Propriété

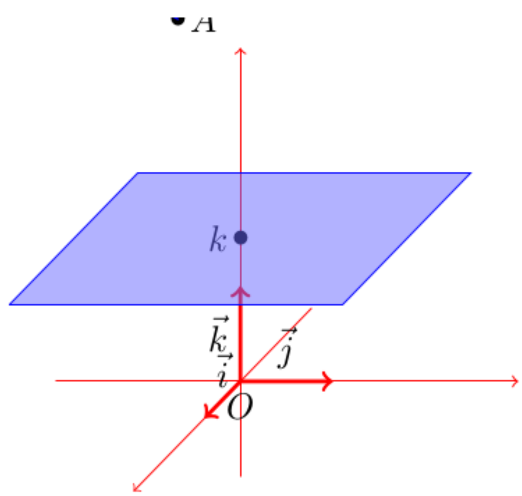
On considère le point : $A\,(x_A; y_A; z_A)$.
On considère de même le vecteur $\vec{n}$ non nul de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$
On note (P) l'unique plan passant par A et de vecteur normal à $\vec{n}$
$M(x; y; z)$ appartient à (P)
si et seulement si : ....
Si et seulement si ....
Si et seulement si $\boxed{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}$ ou $d = -ax_a - by_a - cz_A$
On dit que l'on a déterminé une équation...................... du plan (P)

Propriété réciproque (ADMISE)

Soient a , b et c et d quatre nombres réels
On suppose de plus que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
L'ensemble des points $M(x, y, z)$ qui vérifient l'équation $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ est un plan (P) dont un vecteur normal a pour coordonnées $(a; b; c)$

Cas particulier

- Le plan parallèle au plan $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ et passant par $K(0, 0, k)$ admet pour équation : $\boxed{z = k}$
- Le plan parallèle au plan $\left(O; \vec{j}; \vec{k}\right)$ et passant par $L(l, 0, 0)$ admet pour équation : $\boxed{x = l}$
- Le plan parallèle au plan $\left(O; \vec{i}; \vec{k}\right)$ et passant par $M(0, m, 0)$ admet pour équation : $\boxed{y = m}$



Savoir faire :

On considère les points $A(0;1,1)$, $B(-4;2;3)$ et $C(4;-1,1)$

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) défini par ces trois points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$. On considère les points :

$$\text{A}(4\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad \text{B}(0\ ;\ 2\ ;\ 0),\quad \text{C}(0\ ;\ 0\ ;\ 3)\quad \text{et E}\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer la distance δ_{E} du point E au plan (ABC).

1. (a) Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
   (b) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;6\,;4)$.
   Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.
2. (a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

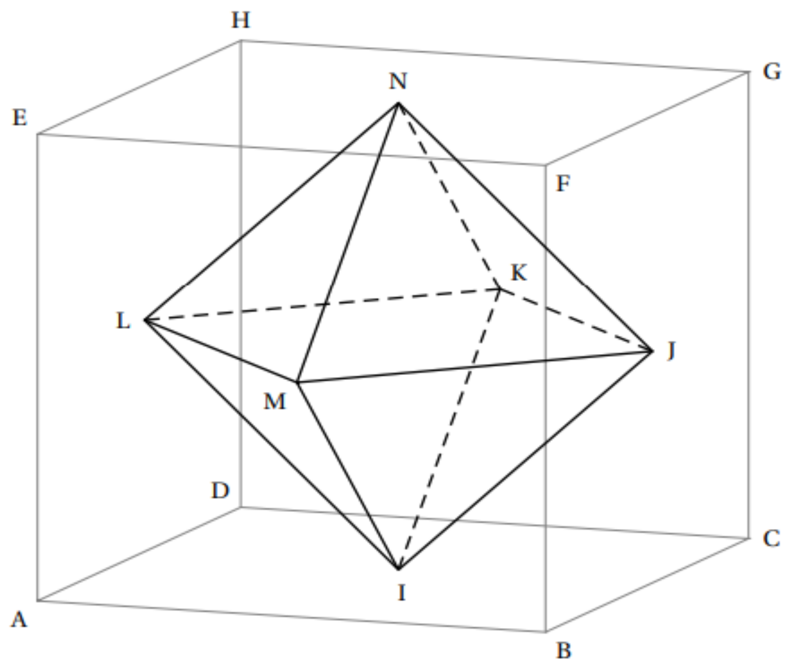
$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{3}t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

   est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.
   (b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).
   (c) Déterminer à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_{E}.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.

   b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

   c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

3. **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

   b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

   c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

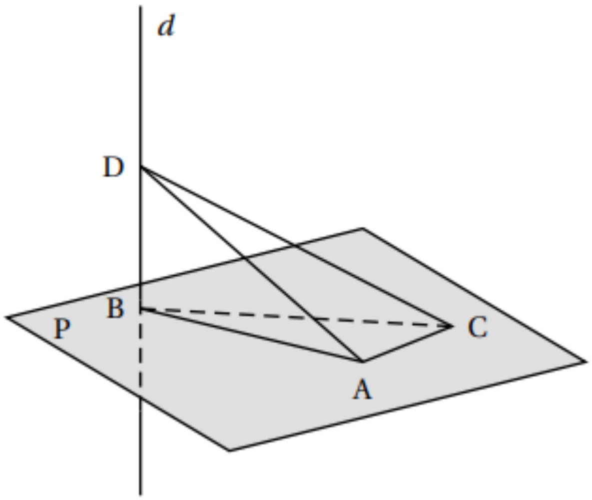
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3. **a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; −5) et la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2t+1 \\ y & = & -2t+9 \\ z & = & t-3 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; −1),

3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9 ; 1 ; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.

En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.