Devoir surveillé

Exercice 1 : 6 points

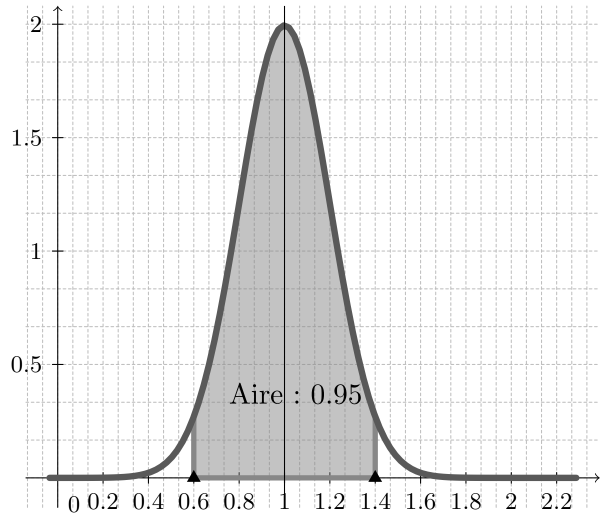
1. Deux amis se téléphonent très régulièrement. la durée d'une communication entre ces deux amis, exprimée en minutes, suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;60]$
La probabilité qu'une communication soit comprise entre 5 et 20 minutes est égale à :
❒ $0,25$ ❒ $0,5$ ❒ $0,2$ ❒ $0,25$

2. Dans la situation précédente, on sait qu'une communication dure depuis 20 minutes, la probabilité que cette communication n'excède pas 40 minutes est égale à :
❒ $\frac{1}{2}$ ❒ $\frac{2}{3}$ ❒ $\frac{1}{3}$ ❒ $\frac{3}{4}$

3. Il existe plusieurs tests pour mesurer le quotient intellectuel (Q.I.) standart dont le test de Cattell. on admet que le Q.I. mesuré à l'aide de ce test suit une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 24. La probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un Q.I. inférieur ou égal à 130 est égale à
❒ $0,5$ ❒ $0,8944$ ❒ $0,95$ ❒ $0,8849$
On pourra utiliser l'extrait de table de la loi normale centrée réduite donnée en annexe 1 ou utiliser la calculatrice.

4. .

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale.
La figure ci-contre donne la courbe représentative de la fonction densité associée à la variable aléatoire X



L'écart-type σ de la variable aléatoire X est égal à :
❒ $0,1$ ❒ $0,2$ ❒ $0,4$ ❒ $0,6$

Exercice 2 : 6 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note (D) la droite passant par les points $A(1~;~-2~;~-1)$ et $B(3~;~-5~;~-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

Exercice 3 : 8 points

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction g puis établir le tableau de variations de g

3. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

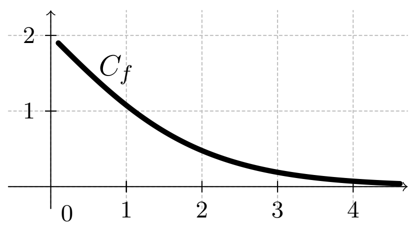
1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé ci-contre.



Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C}_f)$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $\mathrm{O}PMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

Annexe 1 : extrait de table (T loi $\mathcal{N}(0;1)$)

t	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29
$P(T \le t)$	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015