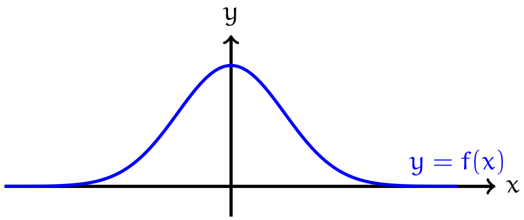
Loi normale

Dossier N° 25 TS3

Entraînement et apprentissage

Exercice 1 : Exploitation de la courbe densité de la loi N(0,1)



1

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. On donne $P(Z \leqslant 1{,}8) \approx 0{,}964$ et $P(Z \leqslant 2{,}3) \approx 0{,}989$. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(Z > 2{,}3)$.

(b) $P(Z < -1{,}8)$.

(c) $P(-1{,}8 < Z < 2{,}3)$.

(d) $P(Z < -1{,}8 \text{ ou } Z > 2{,}3)$.

2

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. On donne $P(Z < -2{,}3) \approx 0{,}011$ et $P(Z < 2{,}9) \approx 0{,}998$. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(Z \geqslant -2{,}3)$.

(b) $P(Z > 2{,}9)$.

(c) $P(-2{,}3 < Z < 2{,}9)$.

(d) $P(Z < -2{,}3 \text{ ou } Z > 2{,}9)$.

Exercice 2 : Retour à la loi normale centrée réduite

Rappel

Une variable aléatoire X suit une loi $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2$ si et seulement si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma^2}$ suit la loi normale $\mathrm{N}(0;1)$

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. On donne $P(Z < 1) = 0{,}84$.

Déterminer sans calculatrice :

(a) $P(X \leqslant 10)$ pour $X \sim \mathcal{N}(8;4)$.

(b) $P(X \geqslant 0)$ pour $X \sim \mathcal{N}(-5;25)$.

(c) $P(X < 0)$ pour $X \sim \mathcal{N}(5;25)$.

(d) $P(1 < X < 5)$ pour $X \sim \mathcal{N}(5;16)$.

Exercice 3 : Un peu de théorie

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $\Phi(x) = P(X \leqslant x)$

1. Montrer que $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$

2. En déduire que, pour tout réel $\alpha \in \left]0;1\right[$:

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha \iff \Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

3. **(a)** Pour $\alpha = 0{,}05$, quelle doit être la valeur de $\Phi(u_\alpha)$?
À l'aide de la table donnée en annexe, déterminer la valeur de u_α correspondante.

(b) Déterminer ainsi $u_{0{,}02}$ et $u_{0{,}001}$.

Exercice 4 : Un peu de théorie (bis)

On veut construire un algorithme permettant de déterminer le seuil u_α à 0,01 près.
On suppose que l'on dispose d'une instruction du type `Norm(a,b)`, qui renvoie $P(X \in [a,b])$, lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il permette d'obtenir, α étant donné par l'utilisateur, une valeur approchée de u_α à 0,01 près.

```
Début
   Entrer la valeur de α
   u prend la valeur 0
   p prend la valeur 0
       TantQue p < 1 − α
          p prend la valeur Norm(   ,   )
          u prend la valeur
       Fin TantQue
   Afficher
Fin
```

2. Modifier l'algorithme pour qu'il demande à l'utilisateur la précision souhaitée.

Exercice 5 : Théorème de Moivre-Laplace

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(121;0,5)$.

1. Calculer à l'aide d'une calculatrice, $P\left(-2 \leqslant \dfrac{X-60,5}{5,5} \leqslant 2\right)$.

2. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Que vaut $P(-2 \leqslant Z \leqslant 2)$.

3. Pourquoi ces deux quantités sont-elles proches ?

Exercice 6 : On ne connaît pas m et σ

La valeur Z de la fluorescence de la chlorophylle α en milieu océanique, exprimée en millivolt, suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
On a pu expérimentalement vérifier que :

$$P(Z < 39) = 09357 \text{ et } P(Z < 25,5) = 0,2266$$

1. Quelle loi suit la variable aléatoire $\dfrac{Z-\mu}{\sigma}$?

2. Déterminer un système vérifié par μ et σ.

3. En déduire μ et σ.

Exercice 7 : Intervalle au seuil $1-\alpha$, Intervalles un, deux, trois sigma

On a observé que la taille T des basketteurs, en cm, suivait approximativement une loi normale $\mathcal{N}(195;36)$.

1. Déterminer, sans calcul, un intervalle dans lequel la taille d'un basketteur pris au hasard, a deux chances sur trois de se trouver.

2. Un recruteur décide de restreindre sa recherche aux basketteurs qui se situe dans le plus petit intervalle I centré en 195 tel que $P(T \in I) \approx 0,8$.

(a) Déterminer cet intervalle, sachant que $u_{0,2} \approx 1,28$.

(b) Sachant que le meilleur basketteur français, Tony Parker, mesure 1,86 m, que peut-on penser du choix du recruteur ?

Exercice 8 : Un exercice concret

Une machine remplit des flacons de produit de nettoyage pour lentille de contact. Dans la production d'une journée, on prélève au hasard un flacon. On désigne par V la variable aléatoire qui, à chaque flacon, associe le volume de produit en ml.

1. On suppose que V suit $\mathcal{N}(250;16)$. Calculer la probabilité que le volume de produit, soit compris entre 245 et 255 millilitres, à 10^{-4} près.

2. Le réglage de la machine est modifié de façon que 95 % des flacons contiennent entre 245 et 255 millilitres de produit. On suppose qu'après réglage, la variable aléatoire V suit la loi $\mathcal{N}(250;\sigma)$.
Calculer σ.

Approfondissement

Exercice 9 : La sélection chez les vaches laitières

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1 Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

(a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.

(b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.

(c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres par an.

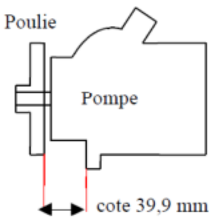
2 Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

(a) la production maximale prévisible des 30 % de vaches les moins productives du troupeau.

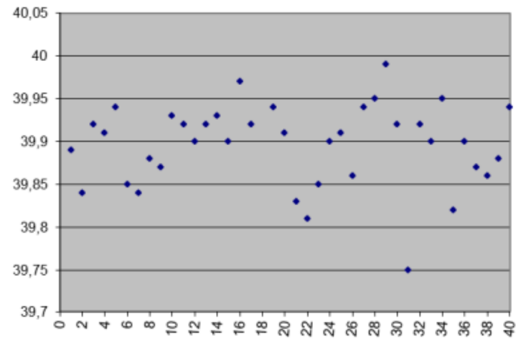
(b) la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.

Exercice 10 : Processus industriel

Le schéma ci-contre représente une pompe de direction assistée d'automobile. Le processus industriel étudié est une presse d'emmanchement de la poulie sur l'axe de la pompe. Les performances de la presse sont variables, cette variabilité ayant de nombreuses causes possibles : main d'oeuvre, matériel, matière première.
Sur le schéma ci-contre est spécifiée par le constructeur une cote de 39,9 mm.



On a mesuré cette cote sur 40 ensembles poulie-pompe issus du processus de fabrication en série. Les variations sont représentées sur le graphique suivant :



1 Ce type de processus industriel induit la modélisation de la variable aléatoire « cote » par une variable suivant une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. Donner par lecture graphique une valeur estimée de l'espérance μ et de l'écart-type σ à partir de la série des 40 valeurs.

2 L'intervalle de tolérance pour cette cote est de $39,9 + / - 0,15$. Donner, à l'aide des 40 mesures effectuées, une valeur approchée de la probabilité que la variable cote soit dans cet intervalle.

Exercice 11 : Masse d'alerte pour cartes de contrôle

Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de $12,5g$ pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40.
La masse des microplaquettes peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $\mu = 12,5$ et de variance $\sigma^2 = 0,2^2$ et on admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d'espérance$\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$
La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre $496,2g$ et $503,8g$ (soit environ $500 + / - 3\sigma$)

1 Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.

2 Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h < X < \mu + h) = 0,99$. Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité.
Calculer les poids d'alerte.

Exercice 12 : Réglage d'une machine d'embouteillage dans une coopérative

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma == 2$.
La législation impose qu'il y ait moins de $0,1\%$ de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. A quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?
2. La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de μ ?
   (b) Quelle est dans les conditions de la question a) la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?
4. Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles de moins d'un litre ET moins de 1 % de bouteilles qui débordent.

Exercice 13 : Durée de vie d'un appareil

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils doivent avoir une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Annexe 1

Voici des tutos pour utiliser les calculatrices

1. CASIO : `https://www.youtube.com/watch?v=qD1Nt5fkQa4`
2. TEXAS : `https://www.youtube.com/watch?v=kZVL8AR-1ug`

Annexe 2 : table de loi normale

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6654	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	08186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8797	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8988	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
P(T<t)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997