Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

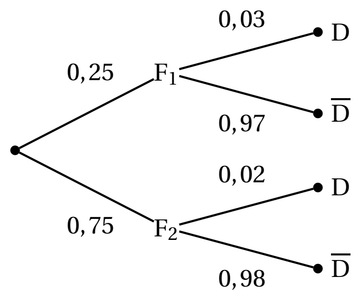
Commun à tous les candidats

1. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i} \iff 2x + 2\mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = 9 + \mathrm{i} \iff 3x + \mathrm{i}y = 9 + \mathrm{i}$ et par identication $x = 3$, $y = 1$.
   Réponse c.
2. Par les différentes solutions possibles $|z+\mathrm{i}| = |\overline{z}-\mathrm{i}|$ (deux complexes conjugués ont le même module ; $|\overline{z} - \mathrm{i}| = |\mathrm{i}| \times |\overline{z} - \mathrm{i}| = |\mathrm{i}(\overline{z} - \mathrm{i})| = |\mathrm{i}\overline{z} - \mathrm{i}^2| = |\mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i}|$.
   Réponse c.
3. On pose $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   Donc $\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)}$.
   Réponse b.
4. $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Donc $\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ est un imaginaire pur si et seulement si un de ses arguments est égal à $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.
   Donc $\frac{n\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \iff n = 6k + 3$.
   Réponse b.
5. $|z - \mathrm{i}| = |z + 1| \iff \mathrm{A}M = \mathrm{B}M$ donc M appartient à la médiatrice de [AB] qui est bien la perpendiculaire à [aB] contenant O.
   Réponse c.
6. $|z - 1 + \mathrm{i}| = |3 - 4\mathrm{i}| \iff \Omega M = 5$. Les points appartiennent donc au cercle de centre Ω et de rayon 5. Pour tout point M de ce cercle on a $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ qui se traduit en termes d'affixes par $z = 1 - \mathrm{i} + 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel.
   Réponse c.
7. C est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. D'où
   $c - a = \mathrm{i}(b - a) \iff c = a + \mathrm{i}(b - a) \iff c = 4 + \mathrm{i}(3\mathrm{i} - 4) = 1 - 4\mathrm{i}$
   Réponse a.
8. $\dfrac{z-2}{z-1} = z \iff z - 2 = z^2 - z$ (avec $z \neq 1$) soit $z^2 - 2z + 2 = 0$ On trouve les deux solutions $1 - \mathrm{i}$; $1 + \mathrm{i}$.
   Réponse c.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Arbre pondéré.



b. Calculer $p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F}_1) = p(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D}) = 0,25 \times 0,03 = 0,0075$.
De même $p(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
Donc $p(D) = p(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}) = 0,0075 + 0,015 = 0,0225$.

c. On sait que $p_{\mathrm{D}}(F_1) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F}_1)}{p(\mathrm{F}_1)} = \dfrac{0,03}{0,09} = \dfrac{1}{3}$.

2. La probabilité d'avoir k composants défectueux sur 20 est :
$p(X = k) = \binom{20}{k} 0,0225^k \times (1 - 0,0225)^{20-k}$. (épreuve de Bernoulli avec $n = 20$ et $p = 0,02255$.)
La probabilité d'avoir au moins deux composants défectueux est égale à :
$p(X \geqslant 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,9775^{20} - 0,0225 \times 0,9775^{19} \approx 0,3510$.
Donc $p(X \geqslant 2) \approx 0,351$.

3. **a.** On sait que $p(X > 5) = \displaystyle\int_5^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_5^{+\infty} = \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,325$.
Or $\mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,325 \iff -5\lambda = \ln 0,325 \iff \lambda = \dfrac{-\ln 0,325}{5} \approx 0,2247 \approx 0,225$.

b. $p(X < 8) = 1 - p(X \geqslant 8) = 1 - \displaystyle\int_8^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{0,225 \times 8} \approx 0,835$.
D'où $p(X \geqslant 8) = 1 - p(X < 8) \approx 1 - 0,835 \approx 0,165$

c. La loi étant sans vieillissement la probabilité est $p(X > 5) = 0,325$.

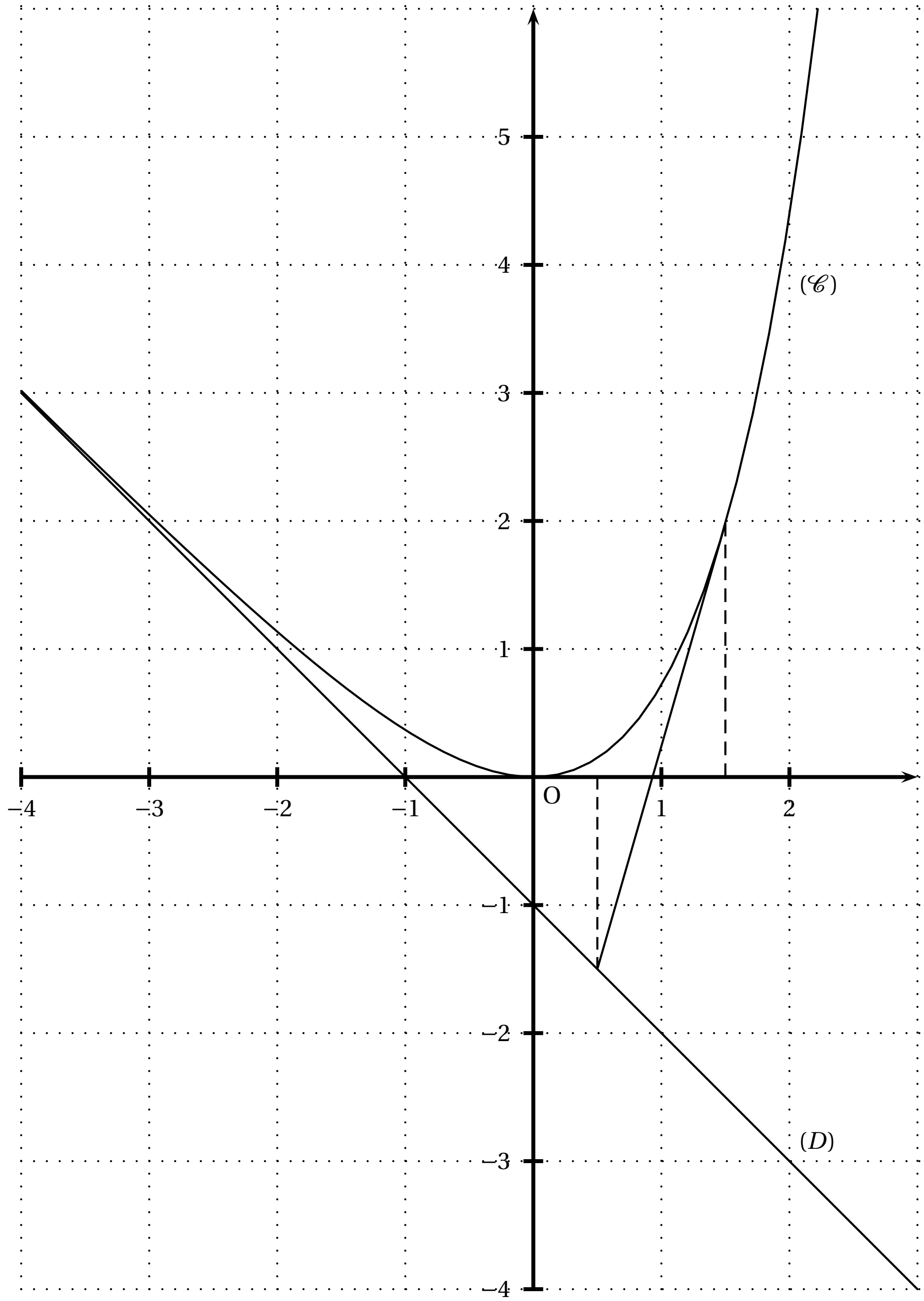
EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie B
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

1. Pour $M \neq \mathrm{A}$, $M(X\,;\,Y) \in (T) \iff \dfrac{Y - f(a)}{X - a} = f'(a) \iff \dfrac{Y - \mathrm{e}^a + a + 1}{X - a} = \mathrm{e}^a - 1 \iff Y - \mathrm{e}^a + a + 1 = (X - a)(\mathrm{e}^a - 1) \iff Y = \mathrm{e}^a - a - 1 - a\mathrm{e}^a + a + X(\mathrm{e}^a - 1) \iff Y = X(\mathrm{e}^a - 1) + \mathrm{e}^a(1 - a) - 1$.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point $N(X\,;\,Y) \iff Y = -X - 1 = X(\mathrm{e}^a - 1) + \mathrm{e}^a(1 - a) - 1 \iff X\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(a - 1) \iff X = b = a - 1 \iff b - a = -1$.
3. Pour construire la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a, il suffit de construire le point de (D) d'abscisse $a - 1$ et la tangente est obtenue en joignant ce point à M. Exemple ci-dessous avec $a = 1,5$.



Partie C

1. Graphiquement on lit $f(x) \geqslant 0$ ($f(0) = 0$).
2. On a donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^x \geqslant x + 1$.
   En appliquant cette inégalité à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient (1) $\text{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ et en l'appliquant à $x = -\dfrac{1}{n+1}$ on obtient (2) $\text{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
3. La fonction $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ étant croissante (1) $\Rightarrow \left(\text{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \iff$
   $\text{e} \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \iff \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \text{e}$.
4. De même (2) $\Rightarrow \left(\text{e}^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \text{e}^{-1} \geqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \text{e} \Longleftrightarrow \text{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

5. 3. montre que e majore $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

4. s'écrit $\text{e} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow \text{e} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \times \left(\dfrac{n+1}{n}\right) \Longleftrightarrow \dfrac{n}{n+1}\text{e} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

On obtient donc l'encadrement :

$$\frac{n}{n+1}\text{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant \text{e}.$$

Par application du théorème des « gendarmes », car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \text{e}.$$

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** La droite (OH) étant orthogonale au plan (ABC) est orthogonale à toute droite de ce plan, donc à la droite (BC).
La droite (OA) perpendiculaire à (OB) et à (OC) est orthogonale au plan (OBC) ; elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (BC).

b. Soit $\overrightarrow{\text{AH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \left(\overrightarrow{\text{AO}} + \overrightarrow{\text{OH}}\right) \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0+0 = 0$.
Conclusion : les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

c. D'après la question précédente (AH) est hauteur du triangle (ABC), de même que (BH) et (CH), donc H est l'orthocentre du triangle (ABC).

2. **a.** Soit $ax+by+cz=d$ une équation du plan (ABC).
En écrivant que A, B et C ont des coordonnées qui vérifient cette équation, on obtient $a=d$, $2b=d$ et $3c=d$. En prenant $d=6$, on obtient une équation : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \Longleftrightarrow 6x+3y+2z=6$

b. La question précédente montre qu'un vecteur normal à (ABC) est $\overrightarrow{n}\,(6\,;\,3\,;\,2)$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{D}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\text{O}M} = t\overrightarrow{n},\ t\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &=& 6t \\ y &=& 3t \\ z &=& 2t \end{cases}$

c. $\text{H}(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{D}) \cap (\text{ABC}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x &=& 6t \\ y &=& 3t \\ z &=& 2t \\ 6x+3y+2z &=& 6 \end{cases} \Rightarrow$

$36t+9t+4t=6 \Longleftrightarrow t=\dfrac{6}{49}$.

Donc H a pour coordonnées $\left(\dfrac{36}{49}\,;\,\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{12}{49}\right)$.

3. **a.** La distance du point O au plan (ABC) est la plus courte distance de O au plan (ABC) : c'est donc OH.

On a $\text{OH}^2 = \left(\dfrac{36}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{18}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{49}\right)^2 = \dfrac{1\,764}{49^2} = \dfrac{42^2}{49^2}$.

Conclusion $\text{OH} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{6}{7}$.

b. On a (1) $\mathscr{V}(\text{OABC}) = \dfrac{\mathscr{A}(\text{ABC}) \times \text{OH}}{3} = \dfrac{\mathscr{A}(\text{OAB}) \times \text{OC}}{3}$.
Or (OAB) est un triangle rectangle dont l'aire est égale à 1 et OC = 3.
On a donc (1) $\iff \dfrac{\mathscr{A}(\text{ABC}) \times \frac{6}{7}}{3} = 1 \iff \mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{7}{2}$.

c. $\mathscr{A}(\text{OAB})^2 + \mathscr{A}(OAC)^2 + \mathscr{A}(OBC)^2 = 1^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = 1 + \dfrac{9}{4} + 9 = \dfrac{49}{4} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^2$.
Donc le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $6^2 = 36 \equiv 3 \quad \text{mod } 11$, donc $\left(6^2\right)^5 \equiv 3^5 \quad \text{mod } 11$ ou encore $6^{10} \equiv 1 \quad \text{mod } 11$ car $3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1$.
Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est donc 1.

b. $6^2 \equiv 1 \quad \text{mod } 5$, donc $6^4 \equiv 1 \quad \text{mod } 5$.
Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est 1.

c. On a vu que $6^{10} \equiv 1 \quad [11]$, donc $\left(6^{10}\right)^4 \equiv 1^4 = 1 \quad [11]$. De même $6^4 \equiv 1 \quad \text{mod } 5$, donc $\left(6^4\right)^{10} = 6^{40} \equiv 1^{10} = 1 \quad \text{mod } 5$; donc $6^{40} \equiv 1 \quad [5]$.

d. Les questions précédentes montrent que $6^{40} - 1$ est un multiple de 11 et de 5, donc de $511 \times 5 = 55$ qui sont premiers entre eux.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. 65 et 40 sont multiples de 5, donc $65x - 40y$ l'est aussi, alors que 1 ne l'est pas.
Conclusion : l'équation $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. 17 et 40 sont premiers entre eux. Il existe donc au moins un couple $(u\,;\,v)$ tel que $17u - 40v = 1$.

c. On a

$$\begin{aligned} 40 &= 17 \times 2 + 6 && (1)\\ 17 &= 6 \times 2 + 5 && (2)\\ 6 &= 5 \times 1 + 1. && (3) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 && (4)\\ 1 &= 6 - (17 - 2 \times 6) = -17 + 3 \times 6 && (5)\\ 1 &= -17 + 3(40 - 2 \times 17) = 3 \times 40 - 7 \times 17. && (6) \end{aligned}$$

La dernière égalité peut s'écrire $17 \times (-7) - 3 \times (-40) = 1$, qui montre que le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de l'équation (E').

d. On a le système $\left\{\begin{array}{lcl} 17x - 40y & = & 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-4) & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ par différence)
$17(x+7) - 40(y+4) = 0 \iff 17(x+7) = 40(y+4) \quad (7)$.
Or on a vu que 17 et 40 sont premiers entre eux : d'après le théorème de Gauss 40 divise $17(x+7)$ et est premier avec 17, il divise donc $x + 7$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 7 = 40k \iff x = -7 + 40k$.
En reportant dans (7) et en simplifiant par 40, on obtient $17k = y + 4 \iff y = -4 + 17k$.
Les solutions de (E') sont donc tous les couples $(-7 + 40k\,;\,-4 + 17k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit un couple $(x\ ;\ y)$ solution de (E'). Si $x \in \mathbb{N}$ et $x < 40$, alors $0 < -7 + 40k < 40 \iff 7 < 40k < 47 \Rightarrow 0 < k < 2$.
Il y a une seule solution $k = 1$ qui donne $x_0 = 33$.
Effectivement : $17 \times 33 = 561 = 40 \times 14 + 1$.

3. $a^{17} \equiv b \quad [55] \Rightarrow \left(a^{17}\right)^{33} \equiv b^{33} \quad [55] \iff a^{17\times 33} \equiv b^{33} \quad [55]$.
D'après la question précédente $17\times 33 - 1 = 40\times 14$, donc $a^{17\times 33} = a^{40\times 14+1} \quad [55] \iff a^{40\times 14} \times a \equiv b^{33} \quad [55]$.
Or $a^{40} \equiv 1 \quad [55] \Rightarrow a^{40\times 14} \equiv 1 \quad [55]$.
Conclusion : $a \equiv b^{33} \quad [55]$