Loi normale

Loi normale centrée réduite

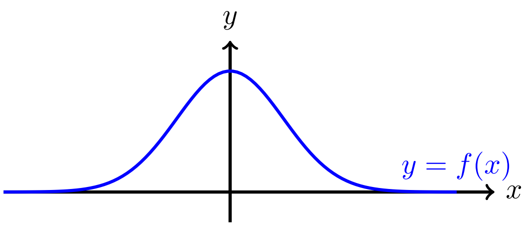
Généralités

Définition

La loi suivie par la variable aléatoire dont la fonction densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est appelée **Loi normale centré réduite** notée $\boxed{N(0;1)}$

Ainsi : si X suit une loi $N(0;1)$ on a :
Pour tous nombres réels a et b ($a \leq b$)

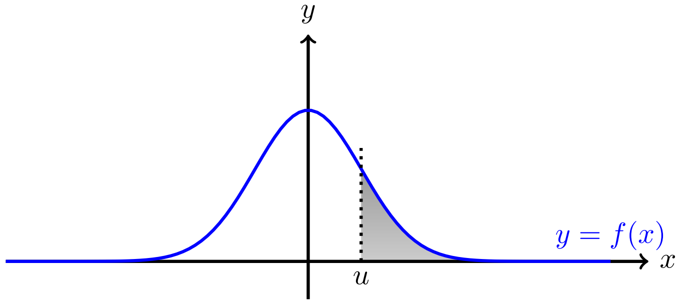
$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx}$$



Premières propriétés : Admises

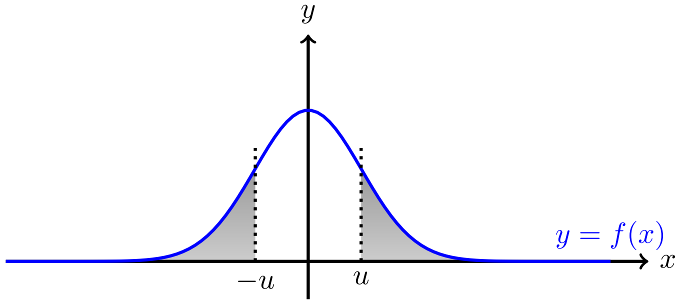
- f est continue sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \cdots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \cdots$
- La fonction f est paire ; sa courbe représentative est donc $\cdots\cdots\cdots\cdots$
- L'aire totale sous la courbe de f est égale à $\cdots$.
- L'aire sous la courbe sur $[0; +\infty[$ vaut $\dfrac{\cdots}{\cdots}$

Remarque 1



$P(X \geq u) = \cdots\cdots\cdots$

Remarque 2



$P(X \geq u) = \cdots\cdots\cdots$

Calcul de probabilités

-] On a : pour tous nombres réels a et b $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$
- On ne sait en général pas calculer exactement une telle intégrale, car la primitive de n'est pas exprimable avec nos fonctions de référence.
- Avant la période des calculatrice et ordinateurs les statisticiens utilisaient des tables de valeurs (`http://hgurgey.free.fr/spip.php?article628`)
- Actuellement des valeurs approchées s'obtiennent avec des logiciels de calcul scientifique, des tableurs ou votre calculatrice.

Exercices

On considère une variable aléatoire T qui suit une loi normale centrée réduite (C'est à dire une loi $N(0,1)$).
Donner une valeur approchée de :

1 $P[T \leq 1,83]$

2 $P[T \leq 0,78]$

3 $P[0.4 \leq T \leq 2,1]$

4 $P[T \leq -1.25]$

5 $P[T > 3,2]$

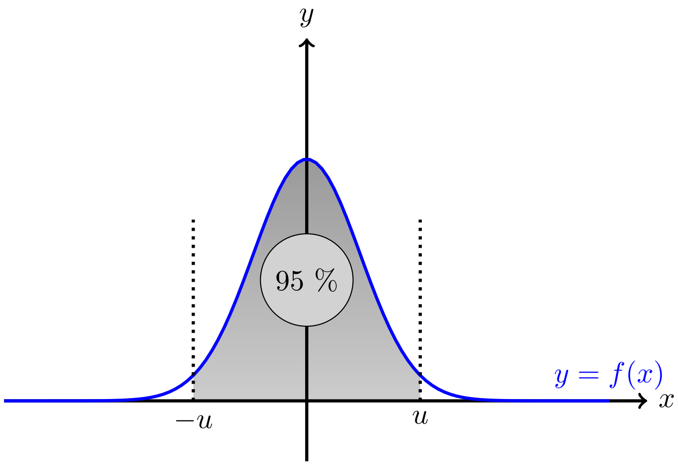
6 $P[-1.2 \leq T \leq 1.2]$

7 La valeur de a telle que : $P[T \leq a] = 0,9418$

8 La valeur de b telle que : $P[T > b] = 0,3632$

INTERVALLE AU SEUIL $1-\alpha$

Exemple d'introduction



Problématique : Déterminer l'intervalle $[-u; u]$ qui contient les 95% des valeurs de la variable aléatoire les plus observées

On cherche donc u tel que : $P[\cdots\cdots\cdots\cdots] = 0,95$

Généralisation

Théorème

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $N(0;1)$ alors :
Pour tout nombre réel α de $]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :
$\boxed{P(-u_\alpha < X < u_\alpha) = 1 - \alpha}$

Démonstration

Les seuils 95% et 99%

Les deux valeurs approchées ci-dessous sont souvent utilisées et doivent être connues :
$\boxed{u_{0.05} \approx 1,96}$ et $\boxed{u_{0,01} \approx 2,58}$
Ce qui se traduit par :

- Environ 95% des réalisations de X se trouvent entre $-1,96$ et $1,96$
- Environ 99% des réalisations de X se trouvent entre $-2,58$ et $2,58$

ESPÉRANCE ET VARIANCE DE LA LOI $N(0;1)$

Moyenne et Variance

On a : $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \times f(x)dx$ qui doit se calculer de la manière suivante :

$$E[X] = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 xf(x)dx + \lim_{T \to +\infty} \int_0^T xf(x)dx$$

On a donc : $E[X] = \cdots\cdots\cdots$

On admet de plus que : $V[X] = 1$

Loi normale $N(\mu;\sigma^2)$

Définition

Loi normale $N(\mu;\sigma^2)$

Une variable aléatoire X suit une loi $N(\mu;\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma^2}$ suit la loi normale $N(0;1)$

Remarque

Il s'agit d'une loi à densité.
C'est à dire qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout nombres réels a et b on a : $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$
Pour info :
$g(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
Cette expression n'est pas à retenir en terminale

Exemple

La masse en kg des nouveaux nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une loi normale de moyenne $\mu = 3,3$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$.
Calculer la probabilité qu'un nouveau né choisi au hasard pèse moins de 2,5 kg à la naissance.

Les intervalles un , deux , trois sigma

Les résultats suivants sont utilisés dans de nombreux contextes.
Ils peuvent être visualisés sur la figure ci-contre :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$