Chapitre 4

Composées de fonctions

I/ Définition

Définition

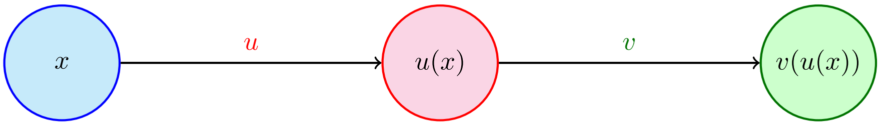
Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Soit v une fonction définie sur un intervalle J.

On suppose que, $\forall x \in I$, $u(x) \in J$.

La fonction notée $v \circ u$ (se lit "v rond u") est la fonction composée qui, à tout réel x de I, associe le réel $v(u(x))$.

Ainsi, $v \circ u = v(u(x))$ $\forall x \in I$.

La fonction $v \circ u$ est obtenue en enchaînant la fonction u suivie de v.



Attention

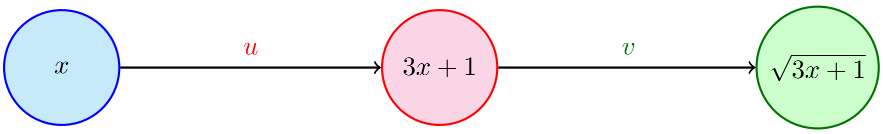
Dans $v \circ u$, on commence par appliquer la fonction u.

Pour que $v(u(x))$ existe, il faut que $u(x)$ appartienne au domaine de définition de la fonction v.

Exemples

$u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$v \circ u(x) = \sqrt{3x+1}$



Pour que $v \circ u(x)$ existe, il faut que $u(x \geq 0$ car $v(x)$ existe sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $v \circ u(x)$ existe $\Leftrightarrow 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$.

D'où $v \circ u(x)$ existe sur $\left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$

Remarque

On peut définir $u \circ v(x) = 3\sqrt{x} + 1$ où $u \circ v(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

II/ Variations d'une fonction composée

Théorème

Soit v une fonction monotone sur J.

Soit u une fonction monotone sur I telle que $\forall x \in I$, on a $u(x) \in J$.

1. Si u et v ont le même sens de variation, alors $v \circ u$ est croissante sur I.
2. Si u et v ont des sens de variation contraires, alors $v \circ u$ est décroissante sur I.

Démonstration : cas où u et v sont toutes les deux décroissantes

Soit v une fonction définie et décroissante sur J et u une fonction définie et décroissante sur I, telle que $\forall x \in I$, $u(x) \in J$.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$

u est décroissante sur I donc $u(a) \geq u(b)$ de plus, $u(a)$ et $u(b)$ sont deux réels de J

Or v est décroissante sur J donc $v(u(a)) \leq v(u(b))$

C'est-à-dire $v \circ u(a) \leq v \circ u(b)$ Donc la fonction $v \circ u$ est croissante sur I.

Démonstration : cas où u est croissante et v décroissante

Soit v une fonction définie et décroissante sur J et u une fonction définie et croissante sur I, telle que $\forall x \in I$, $u(x) \in J$.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$

u est croissante sur I donc $u(a) \leq u(b)$ de plus, $u(a)$ et $u(b)$ sont deux réels de J

Or v est décroissante sur J donc $v(u(a)) \geq v(u(b))$

C'est-à-dire $v \circ u(a) \geq v \circ u(b)$ Donc la fonction $v \circ u$ est décroissante sur I.